

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ► Multiplicación de expresiones algebraicas ► Fórmulas de productos notables ► Factorización de factores comunes ► Factorización de trinomios ► Fórmulas especiales de factorización ► Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo x , y y z , y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica**. Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \quad \sqrt{x} + 10 \quad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k , donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n** . Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

| Polinomio | Tipo | Términos | Grado |
|--------------------------------|-----------------|-------------------------------|-------|
| $2x^2 - 3x + 4$ | trinomio | $2x^2, -3x, 4$ | 2 |
| $x^8 + 5x$ | binomio | $x^8, 5x$ | 8 |
| $3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$ | cuatro términos | $-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$ | 3 |
| $5x + 1$ | binomio | $5x, 1$ | 1 |
| $9x^5$ | monomial | $9x^5$ | 5 |
| 6 | monomial | 6 | 0 |

▼ Suma y resta de polinomios

Propiedad Distributiva

$$ac + bc = (a + b)c$$



Para restar polinomios, tenemos que recordar que **si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis**:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

- (a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.
 (b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & (x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) \\
 &= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 && \text{Agrupe términos semejantes} \\
 &= 2x^3 - x^2 - 5x + 4 && \text{Combine términos semejantes} \\
 \text{(b)} \quad & (x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x) \\
 &= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x && \text{Propiedad Distributiva} \\
 &= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4 && \text{Agrupe términos semejantes} \\
 &= -11x^2 + 9x + 4 && \text{Combine términos semejantes}
 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 15 Y 17

▼ Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

↑ ↑ ↑ ↑
 F O I L

El acrónimo **FOIL** nos ayuda a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los primeros (**First**) términos, los términos externos (**Outer**), los términos internos (**Inner**) y los últimos (**Last**).

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes.

EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando FOIL

$$(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 \quad \begin{array}{c} \text{Propiedad Distributiva} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{F} \quad \text{O} \quad \text{I} \quad \text{L} \end{array}$$

$$= 6x^2 - 7x - 5 \quad \begin{array}{c} \text{Combine términos semejantes} \end{array}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos, usamos la Propiedad Distributiva. También es útil acomodar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN 1: Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes} \\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2: Usando forma de tabla

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 4 \\ 2x + 3 \\ \hline 3x^2 - 15x + 12 \\ 2x^3 - 10x^2 + 8x \\ \hline 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por 3} \\ \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x \\ \text{Sume términos} \end{array}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

▼ Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

Vea en el *Proyecto de descubrimiento*, citado en la página 34, una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B , para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

EJEMPLO 4 | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a) $(3x + 5)^2$ (b) $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$\begin{aligned} (x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 41

EJEMPLO 5 | Uso de las fórmulas de productos notables

Encuentre cada producto.

(a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ (b) $(x + y - 1)(x + y + 1)$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x + y$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned} (x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1] \\ &= (x + y)^2 - 1^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Fórmula de Producto 1

Fórmula de Producto 2

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 55 Y 59

▼ Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 6 | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x$

(b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

(c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad \checkmark$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$\begin{aligned} 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \\ = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

(a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

(b) Observamos que

$8, 6$ y -2 tienen el máximo factor común 2

x^4, y^3 y x tienen el máximo factor común x

y^2, y^3 y y^4 tienen el máximo factor común y^2

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

(c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned} (2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 61, 63 Y 65

▼ Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO 7 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$\overbrace{\hspace{1.5cm}}$
factores de 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Por tanto, tratamos de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir p, q, r y s .

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$$

↓ ↓
factores de a factores de c
↑ ↑

EJEMPLO 8 | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5 \quad \checkmark$$

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

↓ ↓
 factores de 6 factores de -5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69

EJEMPLO 9 | Reconocer la forma de una expresión

Factorice lo siguiente.

(a) $x^2 - 2x - 3$

$$\mathbf{(b)} \quad (5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ [Ensayo y error](#)

(b) Esta expresión es de la forma

$$\boxed{}^2 - 2 \boxed{} - 3$$

donde \square representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la expresión de la parte (a), de modo que se factoriza como $(\square - 3)(\square + 1)$.

$$(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3 = [(5a + 1) - 3][(5a + 1) + 1] \\ = (5a - 2)(5a + 2)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 71

▼ Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

| Fórmula | Nombre |
|--|-------------------------|
| $1. A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ | Diferencia de cuadrados |
| $2. A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ | Cuadrado perfecto |
| $3. A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ | Cuadrado perfecto |
| $4. A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ | Diferencia de cubos |
| $5. A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ | Suma de cubos |

EJEMPLO 10 | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 = 25$ (b) $(x + y)^2 = z^2$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Cambio de palabras, sonido e imágenes en números

Imágenes, sonido y texto se transmiten rutinariamente de un lugar a otro por la Internet, aparatos de fax o módem. ¿Cómo pueden estas cosas transmitirse por cables telefónicos? La clave para hacer esto es cambiarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo cambiar texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia $A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101$, y así sucesivamente. La palabra "BED" (CAMA) se convierte entonces en 000000100000010100000100 . Al leer los dígitos en grupos de ocho, es posible transformar este número de nuevo a la palabra "BED".

Cambiar sonidos a bits es más complicado. Una onda de sonido puede ser graficada en un osciloscopio o en computadora. La gráfica se descompone a continuación matemáticamente en componentes más sencillos correspondientes a las diferentes frecuencias del sonido original. (Aquí se usa una rama de las matemáticas de nombre Análisis de Fourier.) La intensidad de cada componente es un número, y el sonido original puede reconstruirse a partir de estos números. Por ejemplo, se almacena música en un CD como una sucesión de bits; puede verse como $1010100010100101001010101010000010111101010001010111\dots$ (Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits). El reproductor de CD reconstruye la música a partir de los números presentes en el CD.

Cambiar imágenes a números comprende expresar el color y brillo de cada punto (o píxel) en un número. Esto se hace en forma muy eficiente usando una rama de las matemáticas llamada teoría ondulatoria. El FBI emplea trenes de ondas como forma compacta de almacenar en archivo millones de huellas dactilares que necesitan.

SOLUCIÓN

- (a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

- (b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 75 Y 109

EJEMPLO 11 | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

- (a) $27x^3 - 1$ (b) $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

- (a) Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 &= (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

- (b) Usando la fórmula de Suma de Cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 77 Y 79

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{o} \quad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

- (a) $x^2 + 6x + 9$ (b) $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

- (a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

- (b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 105 Y 107

Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado puede factorizarse aún más. En general, *primero factorizamos factores comunes* y luego inspeccionamos el resultado para ver si puede ser factorizado por cualquiera de los otros métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta que hayamos factorizado completamente la expresión.

EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ (b) $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN(a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

(b) Primero factorizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 115 Y 117

En el siguiente ejemplo factorizamos variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

EJEMPLO 14 | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (b) $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

SOLUCIÓN(a) Factorice la potencia de x que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorice la ecuación de} \\ &&& \text{segundo grado } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

(b) Factorice la potencia de $2 + x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $(2 + x)^{-2/3}$.

$$\begin{aligned} (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} &= (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] && \text{Factorice } (2 + x)^{-2/3} \\ &= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) && \text{Simplifique} \\ &= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) && \text{Factorice 2} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

Para ver que haya factorizado correctamente, multiplique usando las Leyes de Exponentes.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) &= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} && \text{(b)} \quad (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] \\ &= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} && = (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 91 Y 93

▼ Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO 15 | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ (b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$
 $= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$
 $= (x^2 + 4)(x + 1)$

Agrupe términos
Factorice factores comunes
Factorice $x + 1$ de cada término

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$
 $= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$
 $= (x^2 - 3)(x - 2)$

Agrupe términos
Factorice factores comunes
Factorice $x - 2$ de cada término

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 83

1.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Considere el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$.

¿Cuántos términos tiene este polinomio? ____

Enliste los términos: ____

¿Cuál factor es común a cada término? ____

Factorice el polinomio: $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$ ____.

2. Para factorizar el trinomio $x^2 + 7x + 10$, buscamos dos enteros cuyo producto sea ____ y cuya suma sea ____.

Estos enteros son ____ y ____, de modo que el trinomio se factoriza como ____.

3. La fórmula de productos notables para la “suma de un cuadrado” es $(A + B)^2 =$ ____.

Por tanto, $(2x + 3)^2 =$ ____.

4. La fórmula de productos notables para la “suma y diferencia de los mismos términos” es $(A + B)(A - B) =$ ____.

Entonces $(5 + x)(5 - x) =$ ____.

5. La fórmula de factorización especial para “la diferencia de cuadrados” es $A^2 - B^2 =$ _____. Entonces, $4x^2 - 25$ se factoriza como _____.

6. La fórmula de factorización especial para un “cuadrado perfecto” es $A^2 + 2AB + B^2 =$ _____. Entonces $x^2 + 10x + 25$ se factoriza como _____.

| Polinomio | Tipo | Términos | Grado |
|----------------------------|------|----------|-------|
| 9. -8 | | | |
| 10. $\frac{1}{2}x^7$ | | | |
| 11. $x - x^2 + x^3 - x^4$ | | | |
| 12. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$ | | | |

13-22 ■ Encuentre la suma, diferencia o producto.

13. $(12x - 7) - (5x - 12)$ 14. $(5 - 3x) + (2x - 8)$

15. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

16. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

17. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

18. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

19. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

20. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

21. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

22. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

23-28 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando el método FOIL y simplifique.

23. $(3t - 2)(7t - 4)$

24. $(4s - 1)(2s + 5)$

25. $(3x + 5)(2x - 1)$

26. $(7y - 3)(2y - 1)$

27. $(x + 3y)(2x - y)$

28. $(4x - 5y)(3x - y)$

29-44 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

29. $(3x + 4)^2$

30. $(1 - 2y)^2$

31. $(2u + v)^2$

32. $(x - 3y)^2$

33. $(2x + 3y)^2$

34. $(r - 2s)^2$

35. $(x + 5)(x - 5)$

36. $(y - 3)(y + 3)$

37. $(3x - 4)(3x + 4)$

38. $(2y + 5)(2y - 5)$

39. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

40. $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

HABILIDADES

7-12 ■ Complete la tabla siguiente diciendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

| Polinomio | Tipo | Términos | Grado |
|-------------------|------|----------|-------|
| 7. $x^2 - 3x + 7$ | | | |
| 8. $2x^5 + 4x^2$ | | | |

.41. $(y + 2)^3$

.43. $(1 - 2r)^3$

45-60 ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

.45. $(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$

.47. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$

.49. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$

.51. $y^{1/3}(y^{2/3} + y^{5/3})$

.53. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$

.55. $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

.56. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

.57. $((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$

.58. $(x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$

.59. $(2x + y - 3)(2x + y + 3)$ **60.** $(x + y + z)(x - y - z)$

61-66 ■ Factorice el factor común.

.61. $-2x^3 + 16x$

.63. $y(y - 6) + 9(y - 6)$

.65. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$

67-74 ■ Factorice el trinomio.

.67. $x^2 + 2x - 3$

.69. $8x^2 - 14x - 15$

.71. $3x^2 - 16x + 5$

.73. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

.74. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

75-82 ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

.75. $9a^2 - 16$

.77. $27x^3 + y^3$

.79. $8s^3 - 125t^3$

.81. $x^2 + 12x + 36$

83-88 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

.83. $x^3 + 4x^2 + x + 4$

.85. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

.87. $x^3 + x^2 + x + 1$

89-94 ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

.89. $x^{5/2} - x^{1/2}$

.91. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

.93. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

.94. $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

95-124 ■ Factorice por completo la expresión.

.95. $12x^3 + 18x$

.97. $x^2 - 2x - 8$

.42. $(x - 3)^3$

.44. $(3 + 2y)^3$

.99. $2x^2 + 5x + 3$

.101. $9x^2 - 36x - 45$

.103. $49 - 4y^2$

.105. $t^2 - 6t + 9$

.107. $4x^2 + 4xy + y^2$

.109. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

.110. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

.111. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$

.113. $8x^3 - 125$

.115. $x^3 + 2x^2 + x$

.117. $x^4y^3 - x^2y^5$

.119. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$

.121. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

.122. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

.123. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

.124. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

125-128 ■ Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la “Regla del Producto”.)

.125. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

.126. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

.127. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

.128. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

.129. (a) Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

(b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

(c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

(d) Factorice por completo: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

130. Verifique las fórmulas especiales de factorización 4 y 5 al expandir sus lados derechos.

APLICACIONES

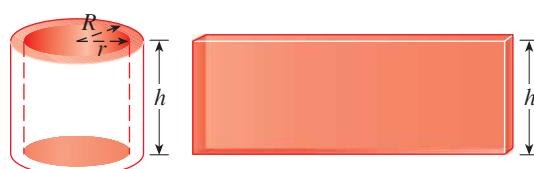
131. Volumen de concreto Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas vaciadas en concreto, como se muestra en la figura. Usando la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

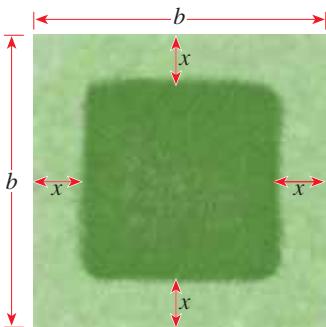
$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

Use el diagrama “desenrollado” para explicar por qué esto tiene sentido geométricamente hablando.



- 132. Podar un campo** Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños (vea la figura). El campo mide b pies por b pies, y la franja podada es de x pies de ancho.

- (a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.
 (b) Factorice la expresión de la parte (a) para demostrar que el área de la parte podada también es $4x(b - x)$.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

133. Grados de sumas y productos de polinomios

Forme varios pares de polinomios y, a continuación, calcule la suma y producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, conteste las siguientes preguntas.

- (a) ¿Cómo está relacionado el grado del producto con los grados de los polinomios originales?
 (b) ¿Cómo está relacionado el grado de la suma con los grados de los polinomios originales?
- 134. El poder de las fórmulas algebraicas** Use la fórmula de una diferencia de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Nótese que es fácil calcular mentalmente la forma factorizada pero no es tan fácil calcular la forma original en esta forma. Evalúe mentalmente cada expresión:

- (a) $528^2 - 527^2$
 (b) $122^2 - 120^2$
 (c) $1020^2 - 1010^2$

A continuación, use la fórmula de productos notables

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar mentalmente estos productos:

- (d) $79 \cdot 51$
 (e) $998 \cdot 1002$

135. Diferencias de potencias pares

- (a) Factorice por completo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.
 (b) Verifique que $18,335 = 12^4 - 7^4$ y que $2,868,335 = 12^6 - 7^6$.
 (c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para factorizar los enteros $18,335$ y $2,868,335$. A continuación demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

136. Factorización de $A^n - 1$

Verifique estas fórmulas al expandir y simplificar el lado derecho.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$

$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$

$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que sería posible factorizar $A^5 - 1$? Verifique su conjectura. Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

- 137. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$** A veces se puede factorizar con facilidad un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$. Por ejemplo,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$$

Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar así. En cambio, podemos usar el siguiente método.

$$x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$$

Sume y
reste x^2

$$= (x^2 + 2)^2 - x^2$$

Factorice el
cuadrado perfecto

$$= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x]$$

Diferencia de
cuadrados

$$= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$$

Factorice lo siguiente, usando cualquier método apropiado.

- (a) $x^4 + x^2 - 2$
 (b) $x^4 + 2x^2 + 9$
 (c) $x^4 + 4x^2 + 16$
 (d) $x^4 + 2x^2 + 1$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Visualización de una fórmula

En este proyecto descubrimos interpretaciones geométricas de algunas fórmulas de productos notables. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web del libro: www.stewartmath.com