## 1.5 ECUACIONES

**Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones**

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra $x$ es la variable. Consideramos $x$ como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de $x$ que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$$\boxed{x = 3}$$

$$4(3) + 7 = 19 \quad ✔$$

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, $A$, $B$ y $C$ representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a".)

### PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

| Propiedad | Descripción |
|---|---|
| **1.** $A = B \quad \Leftrightarrow \quad A + C = B + C$ | Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente. |
| **2.** $A = B \quad \Leftrightarrow \quad CA = CB \quad (C \neq 0)$ | Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente. |

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos "*sume* −7" al resolver una ecuación, es una forma breve de decir "*sume* −7 a cada lado de la ecuación".

## ▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

### ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde $a$ y $b$ son números reales y $x$ es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

| **Ecuaciones lineales** | **Ecuaciones no lineales** | |
|---|---|---|
| $4x - 5 = 3$ | $x^2 + 2x = 8$ | No lineal; contiene el cuadrado de la variable |
| $2x = \frac{1}{2}x - 7$ | $\sqrt{x} - 6x = 0$ | No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable |
| $x - 6 = \dfrac{x}{3}$ | $\dfrac{3}{x} - 2x = 1$ | No lineal; contiene el recíproco de la variable |

### EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

**SOLUCIÓN** Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable $x$ en un lado y todos los términos constante en el otro.

| | |
|---|---|
| $7x - 4 = 3x + 8$ | Ecuación dada |
| $(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$ | Sume 4 |
| $7x = 3x + 12$ | Simplifique |
| $7x - 3x = (3x + 12) - 3x$ | Reste $3x$ |
| $4x = 12$ | Simplifique |
| $\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$ | Multiplique por $\frac{1}{4}$ |
| $x = 3$ | Simplifique |

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = 3$:

$x = 3$ → LI $= 7(3) - 4 = 17$

$x = 3$ → LD $= 3(3) + 8 = 17$

LI = LD ✔

Debido a que es importante VERIFICAR SU RESPUESTA, hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir "lado izquierdo" y LD es "lado derecho" de la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15** ■

En las ciencias, muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo, resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

Ésta es la Ley de Newton de Gravitación Universal. Da la fuerza gravitacional $F$ entre dos masas $m$ y $M$ que están a una distancia $r$ entre sí. La constante $G$ es la constante universal de gravitación.

**EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras**

Despeje $M$ de la ecuación siguiente.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar $M$ en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplifique}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

**EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras**

El área superficial $A$ del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud $l$, el ancho $w$ y la altura $h$ de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje $w$ en términos de las otras variables de esta ecuación.

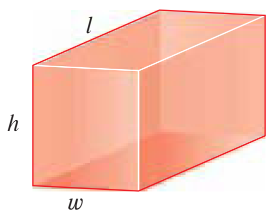



**FIGURA 1** Una caja rectangular cerrada

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar $w$ en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

**Ecuaciones cuadráticas**

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$3x + 10 = 4x^2$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6} = 0$$

**ECUACIONES CUADRÁTICAS**

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

**PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO**

$$AB = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

## EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

**SOLUCIÓN** Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Resuelva}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✔

$x = -8$:

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

¿Ve usted por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el Ejemplo 4? Factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no nos ayuda a encontrar soluciones, porque 24 se puede factorizar en un número infinito de formas, por ejemplo $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde $c$ es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, de modo que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

**SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA**

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

## EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

**(a)** $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

**(b)** También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **51** Y **53**

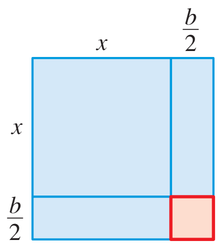
En la página 30 vea cómo reconocer cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

**Completar el cuadrado**

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un pequeño cuadrado de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.




Como vimos en el Ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces podemos resolverla al tomar la raíz cuadrada de cada lado. En una ecuación de esta forma el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en $x$. Por lo tanto, si una ecuación cuadrática no se factoriza fácilmente, entonces podemos resolverla usando la técnica de **completar el cuadrado.** Esto significa que sumamos una constante a una expresión para hacerla cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 - 6x$ sea cuadrado perfecto, debemos sumar 9 porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

### COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$. Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

## EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

**(a)** $x^2 - 8x + 13 = 0$ **(b)** $3x^2 - 12x + 6 = 0$

**SOLUCIÓN**

**(a)**

| | |
|---|---|
| $x^2 - 8x + 13 = 0$ | Ecuación dada |
| $x^2 - 8x = -13$ | Reste 13 |
| $x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ | Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$ |
| $(x - 4)^2 = 3$ | Cuadrado perfecto |
| $x - 4 = \pm\sqrt{3}$ | Tome la raíz cuadrada |
| $x = 4 \pm \sqrt{3}$ | Sume 4 |

**(b)** Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de $x^2$ (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

| | |
|---|---|
| $3x^2 - 12x + 6 = 0$ | Ecuación dada |
| $3x^2 - 12x = -6$ | Reste 6 |
| $3(x^2 - 4x) = -6$ | Factorice 3 del lado izquierdo |

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

| | |
|---|---|
| $3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$ | Complete el cuadrado: sume 4 |
| $3(x - 2)^2 = 6$ | Cuadrado perfecto |
| $(x - 2)^2 = 2$ | Divida entre 3 |
| $x - 2 = \pm\sqrt{2}$ | Tome la raíz cuadrada |
| $x = 2 \pm \sqrt{2}$ | Sume 2 |

Cuando complete el cuadrado, asegúrese que el coeficiente de $x^2$ sea 1. Si no lo es, se debe factorizar este coeficiente de ambos términos que contengan $x$:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

A continuación complete el cuadrado dentro de los paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro de los paréntesis se multiplica por $a$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **59**


Library of Congress

**FRANÇOIS VIÈTE** (1540-1603) tuvo una exitosa carrera política antes de dedicarse a las matemáticas en los últimos años de su vida. Fue uno de los más afamados matemáticos franceses del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades *conocidas* en una ecuación. Antes de la época de Viète, cada ecuación tenía que ser resuelta por sí misma. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

tenían que ser resueltas por separado completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas a la vez escribiendo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ eran cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una *fórmula* (en este caso, la fórmula cuadrática) con $a$, $b$ y $c$ que pueden usarse para resolver todas esas ecuaciones en un solo golpe.

El genio matemático de Viète resultó ser sumamente valioso durante una guerra entre Francia y España. Para comunicarse con sus tropas, los españoles utilizaban un complicado código que Viète se arregló para descifrarlo. Sin saber el logro de Viète, el rey español Felipe II protestó ante el Papa, diciendo que los franceses estaban usando brujería para leer los mensajes de los españoles.

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

**LA FÓRMULA CUADRÁTICA**

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**DEMOSTRACIÓN** Primero, dividimos entre $a$ cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

■

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los Ejemplos 4 y 6. El lector debe realizar los detalles de estos cálculos.

## EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

**(a)** $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

**SOLUCIÓN**

**(a)** En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$b = -5$

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$a = 3$ $c = -1$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

**(b)** Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

**Otro método**

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = 0$$
$$2x + 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2}$$

**(c)** Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **65, 69** Y **75**

En la Sección 3.5 estudiamos el sistema de números complejos, en el que existen las raíces cuadradas de números negativos. La ecuación del Ejemplo 7(c) tiene soluciones en el sistema de números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo $D$. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el Ejemplo 7(c). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el Ejemplo 7(b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el Ejemplo 7(a). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

### EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

## EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

**(a)** $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

### SOLUCIÓN

**(a)** El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

**(b)** El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.

**(c)** El discriminante es $D = (-2)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **79, 81** Y **83**

A continuación consideremos una situación real que puede ser modelada por una ecuación cuadrática.

## EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración debida a la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. Aquí despreciamos el efecto de la resistencia del aire.

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial $v_0$ pies/s alcanzará una altura de $h$ pies después de $t$ segundos, donde $h$ y $t$ están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

**(a)** ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?

**(b)** ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 pies?

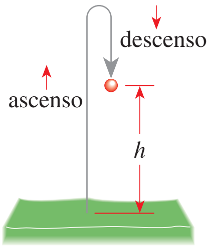
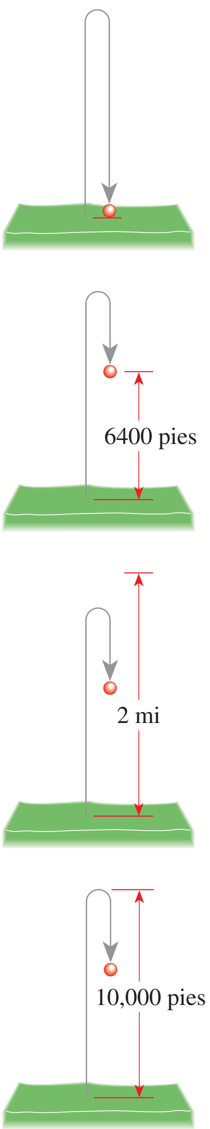



**FIGURA 2**




**(c)** ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?

**(d)** ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?

**SOLUCIÓN** Como la velocidad inicial en este caso es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

$$h = -16t^2 + 800t$$

**(a)** El nivel del suelo corresponde a $h = 0$, de modo que debemos resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= -16t^2 + 800t && \text{Haga } h = 0 \\ 0 &= -16t(t - 50) && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $t = 0$ o $t = 50$. Esto significa que la bala arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a éste después de 50 segundos.

**(b)** Haciendo $h = 6400$ da la ecuación

$$\begin{aligned} 6400 &= -16t^2 + 800t && \text{Haga } h = 6400 \\ 16t^2 - 800t + 6400 &= 0 && \text{Todos los términos al lado izquierdo} \\ t^2 - 50t + 400 &= 0 && \text{Divida entre 16} \\ (t - 10)(t - 40) &= 0 && \text{Factorice} \\ t = 10 \qquad \text{or} \qquad t &= 40 && \text{Resuelva} \end{aligned}$$

La bala llega a 6400 pies después de 10 s (en su ascenso) y otra vez después de 40 s (en su descenso a tierra).

**(c)** Dos millas es $2 \times 5280 = 10{,}560$ pies.

$$\begin{aligned} 10{,}560 &= -16t^2 + 800t && \text{Haga } h = 10{,}560 \\ 16t^2 - 800t + 10{,}560 &= 0 && \text{Todos los términos al lado izquierdo} \\ t^2 - 50t + 660 &= 0 && \text{Divida entre 16} \end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca llega a una altura de 2 millas.

**(d)** Cada altura a la que llega la bala es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de $h$, la siguiente ecuación tiene sólo una solución para $t$:

$$\begin{aligned} h &= -16t^2 + 800t \\ 16t^2 - 800t + h &= 0 && \text{Alterne al lado izquierdo} \end{aligned}$$

Esto a su vez significa que el discriminante $D$ de la ecuación es 0, de modo que

$$\begin{aligned} D = (-800)^2 - 4(16)h &= 0 \\ 640{,}000 - 64h &= 0 \\ h &= 10{,}000 \end{aligned}$$

La máxima altura alcanzada es 10,000 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **111**

## ▼ Otros tipos de ecuaciones

Hasta aquí hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. A continuación estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

## EJEMPLO 10 | Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

**SOLUCIÓN** Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right)x(x+2) &= 2x(x+2) && \text{Multiplique por el MCD } x(x+2)\\
3(x+2) + 5x &= 2x^2 + 4x && \text{Expanda}\\
8x + 6 &= 2x^2 + 4x && \text{Expanda el lado izquierdo}\\
0 &= 2x^2 - 4x - 6 && \text{Reste } 8x + 6\\
0 &= x^2 - 2x - 3 && \text{Divida entre 2 ambos lados}\\
0 &= (x-3)(x+1) && \text{Factorice}\\
x - 3 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 1 = 0 && \text{Propiedad de Producto Cero}\\
x = 3 \quad & \quad\quad x = -1 && \text{Resuelva}
\end{aligned}
$$

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = 3$:

$$
\begin{aligned}
\text{LI} &= \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2}\\
&= 1 + 1 = 2\\
\text{LD} &= 2\\
\text{LI} &= \text{LD} \quad ✔
\end{aligned}
$$

$x = -1$:

$$
\begin{aligned}
\text{LI} &= \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2}\\
&= -3 + 5 = 2\\
\text{LD} &= 2\\
\text{LI} &= \text{LD} \quad ✔
\end{aligned}
$$

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones son $x = 3$ y $-1$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, debe tener especial cuidado para verificar sus respuestas finales. El siguiente ejemplo demuestra el porqué.

## EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

**SOLUCIÓN** Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
2x - 1 &= -\sqrt{2 - x} && \text{Reste 1}\\
(2x - 1)^2 &= 2 - x && \text{Eleve al cuadrado cada lado}\\
4x^2 - 4x + 1 &= 2 - x && \text{Expanda el lado izquierdo}\\
4x^2 - 3x - 1 &= 0 && \text{Sume } -2 + x\\
(4x + 1)(x - 1) &= 0 && \text{Factorice}\\
4x + 1 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 1 = 0 && \text{Propiedad de Producto Cero}\\
x = -\tfrac{1}{4} \quad & \quad\quad x = 1 && \text{Resuelva}
\end{aligned}
$$

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = -\frac{1}{4}$:

$$
\begin{aligned}
\text{LI} &= 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}\\
\text{LD} &= 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)}\\
&= 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}}\\
&= 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}\\
\text{LI} &= \text{LD} \quad ✔
\end{aligned}
$$

$x = 1$:

$$
\begin{aligned}
\text{LI} &= 2(1) = 2\\
\text{LD} &= 1 - \sqrt{2 - 1}\\
&= 1 - 1 = 0\\
\text{LI} &\neq \text{LD} \quad ✗
\end{aligned}
$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91**

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas,** es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el Ejemplo 11 el valor $x = 1$ es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde $W$ es una expresión algebraica, es una ecuación de **tipo cuadrático.** Resolvemos ecuaciones de tipo cuadrático al sustituir por la expresión algebraica, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

## EJEMPLO 12 | Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

**SOLUCIÓN** Si hacemos $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable $W$:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora, obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$.

AHORA INTENTE HACER EL EJECICIO **95**

## EJEMPLO 13 | Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

**SOLUCIÓN** Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

$$W^2 + W - 2 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^{1/6}$$

$$(W - 1)(W + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$W - 1 = 0 \quad \text{o} \quad W + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$W = 1 \qquad W = -2 \qquad \text{Resuelva}$$

$$x^{1/6} = 1 \qquad x^{1/6} = -2 \qquad W = x^{1/6}$$

$$x = 1^6 = 1 \qquad x = (-2)^6 = 64 \qquad \text{Tome la 6a. potencia}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = 1$ es una solución pero $x = 64$ no lo es. La solución es $x = 1$.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = 1$:

LI $= 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$

LD $= 0$

LI $=$ LD ✔

$x = 64$:

LI $= 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$

$= 4 + 2 - 2 = 4$

LD $= 0$

LI $\neq$ LD ✗

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **99**

Al resolver ecuaciones que contengan valores absolutos, por lo general tomamos casos.

## EJEMPLO 14 | Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

**SOLUCIÓN** Por la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 &\quad \text{o} \quad 2x - 5 &= -3 \\ 2x &= 8 & 2x &= 2 \\ x &= 4 & x &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **105**

# 1.5 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. *¿Verdadero o falso?*
   - **(a)** Sumar el mismo número a cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.
   - **(b)** Multiplicar cada lado de una ecuación por el mismo número siempre da una ecuación equivalente.
   - **(c)** Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.

2. Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$.
   - **(a)** Por factorización:_______
   - **(b)** Completando el cuadrado:______
   - **(c)** Usando la fórmula cuadrática:_____

3. **(a)** Las soluciones de la ecuación $x^2(x - 4) = 0$ son________.
   - **(b)** Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 = 0$, ________el lado izquierdo.

4. Resuelva la ecuación $\sqrt{2x} + x = 0$ con los siguientes pasos.
   - **(a)** Aislar el radical:___________.
   - **(b)** Elevar al cuadrado ambos lados:___________.
   - **(c)** Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son_______.
   - **(d)** La(s) solución(es) que satisface la ecuación original es (son)________.

5. La ecuación $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$ es del tipo_________. Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ ____. La ecuación cuadrática resultante es ________.

6. La ecuación $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ es del tipo_______.

   Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ _____.

   La ecuación cuadrática resultante es _________.

## HABILIDADES

**7-10** ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

7. $4x + 7 = 9x - 3$
   **(a)** $x = -2$ **(b)** $x = 2$

8. $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$
   **(a)** $x = 2$ **(b)** $x = 4$

9. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 4} = 1$
   **(a)** $x = 2$ **(b)** $x = 4$

10. $\dfrac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$
    **(a)** $x = 4$ **(b)** $x = 8$

**11-28** ■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

11. $2x + 7 = 31$
12. $5x - 3 = 4$
13. $\frac{1}{2}x - 8 = 1$
14. $3 + \frac{1}{3}x = 5$
15. $-7w = 15 - 2w$
16. $5t - 13 = 12 - 5t$
17. $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$
18. $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$
19. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$
20. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y + 1}{4}$
21. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$
22. $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x + 1}{4} = 6x$
23. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$
24. $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{4}{5}$
25. $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x + 3}$
26. $\dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{35}{x^2 - 1}$
27. $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$
28. $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \dfrac{x + 5}{\sqrt{3}}$

**29-42** ■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

29. $PV = nRT$; despeje $R$
30. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje $m$

**31.** $P = 2l + 2w$; despeje $w$

**32.** $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; despeje $R_1$

**33.** $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$; despeje $x$

**34.** $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje $x$

**35.** $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje $x$

**36.** $\dfrac{a + 1}{b} = \dfrac{a - 1}{b} + \dfrac{b + 1}{a}$; despeje $a$

**37.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje $r$

**38.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje $r$

**39.** $a^2 + b^2 = c^2$; despeje $b$

**40.** $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; despeje $i$

**41.** $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; despeje $t$

**42.** $S = \dfrac{n(n + 1)}{2}$; despeje $n$

**43-54** ■ Resuelva la ecuación por factorización.

**43.** $x^2 + x - 12 = 0$

**44.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

**45.** $x^2 - 7x + 12 = 0$

**46.** $x^2 + 8x + 12 = 0$

**47.** $4x^2 - 4x - 15 = 0$

**48.** $2y^2 + 7y + 3 = 0$

**49.** $3x^2 + 5x = 2$

**50.** $6x(x - 1) = 21 - x$

**51.** $2x^2 = 8$

**52.** $3x^2 - 27 = 0$

**53.** $(3x + 2)^2 = 10$

**54.** $(2x - 1)^2 = 8$

**55-62** ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

**55.** $x^2 + 2x - 5 = 0$

**56.** $x^2 - 4x + 2 = 0$

**57.** $x^2 - 6x - 11 = 0$

**58.** $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

**59.** $2x^2 + 8x + 1 = 0$

**60.** $3x^2 - 6x - 1 = 0$

**61.** $4x^2 - x = 0$

**62.** $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

**63-78** ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

**63.** $x^2 - 2x - 15 = 0$

**64.** $x^2 + 5x - 6 = 0$

**65.** $x^2 - 7x + 10 = 0$

**66.** $x^2 + 30x + 200 = 0$

**67.** $2x^2 + x - 3 = 0$

**68.** $3x^2 + 7x + 4 = 0$

**69.** $3x^2 + 6x - 5 = 0$

**70.** $x^2 - 6x + 1 = 0$

**71.** $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

**72.** $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

**73.** $4x^2 + 16x - 9 = 0$

**74.** $0 = x^2 - 4x + 1$

**75.** $w^2 = 3(w - 1)$

**76.** $3 + 5z + z^2 = 0$

**77.** $10y^2 - 16y + 5 = 0$

**78.** $25x^2 + 70x + 49 = 0$

**79-84** ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

**79.** $x^2 - 6x + 1 = 0$

**80.** $3x^2 = 6x - 9$

**81.** $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

**82.** $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

**83.** $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

**84.** $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

**85-108** ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

**85.** $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{5}{4}$

**86.** $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x - 3} + 4 = 0$

**87.** $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$

**88.** $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

**89.** $\dfrac{x + 5}{x - 2} = \dfrac{5}{x + 2} + \dfrac{28}{x^2 - 4}$

**90.** $\dfrac{x}{2x + 7} - \dfrac{x + 1}{x + 3} = 1$

**91.** $\sqrt{2x + 1} + 1 = x$

**92.** $\sqrt{5 - x} + 1 = x - 2$

**93.** $2x + \sqrt{x + 1} = 8$

**94.** $\sqrt{\sqrt{x - 5} + x} = 5$

**95.** $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

**96.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

**97.** $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

**98.** $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

**99.** $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

**100.** $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

**101.** $4(x + 1)^{1/2} - 5(x + 1)^{3/2} + (x + 1)^{5/2} = 0$

**102.** $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

**103.** $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

**104.** $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

**105.** $|3x + 5| = 1$

**106.** $|2x| = 3$

**107.** $|x - 4| = 0.01$

**108.** $|x - 6| = -1$

## APLICACIONES

**109-110** ■ **Problemas de cuerpos en caída** Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura $h_0$ sobre el suelo. Entonces su altura después de $t$ segundos está dada por $h = 16t^2 + h_0$, donde $h$ se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.

**109.** Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

**110.** Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.

**(a)** ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?

**(b)** ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

**111-112** ■ **Problemas de cuerpos en caída** Use la fórmula $h = -16t^2 + v_0 t$ que se estudia en el Ejemplo 9.

**111.** Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

**(a)** ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?

**(b)** ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?

**(c)** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

**(d)** ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

**(e)** ¿Cuándo cae al suelo?

**112.** ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0 t + h = 0$.]

**113.** **Contracción en vigas de concreto** A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de $w$ kg/m$^3$, entonces se contraerá con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10{,}000}$$

donde $S$ es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

**(a)** Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m$^3$ de agua. ¿Cuál es el factor de contracción $S$? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

**(b)** Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción sea $S = 0.00050$. ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?

**114. La ecuación de lentes** Si $F$ es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia $x$ desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia $y$ del lente, donde $F$, $x$ y $y$ están relacionadas por la *ecuación de lentes*

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4.8 cm y que la imagen de un objeto está 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

**115. Población de peces** La población de peces de cierto lago sube y baja de acuerdo con la fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$

Aquí $F$ es el número de peces en el tiempo $t$, donde $t$ se mide en años desde el 1 de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

**(a)** ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma de como era el 1 de enero de 2002?

**(b)** ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

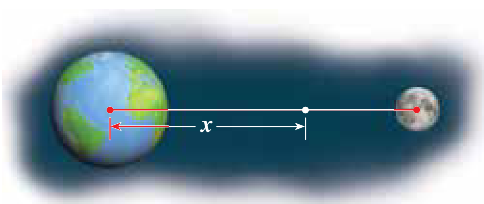
**116. Población de peces** Un gran estanque es abastecido de peces. La población $P$ de peces está modelada con la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde $t$ es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

**117. Utilidades** Un fabricante de aparatos pequeños encuentra que la utilidad $P$ (en dólares), generada por producir $x$ hornos de microondas por semana, está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre que $0 \le x \le 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de $1250?

**118. Gravedad** Si un segmento imaginario de recta se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza $F$ gravitacional neta que actúa sobre un objeto situado sobre este segmento de recta es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

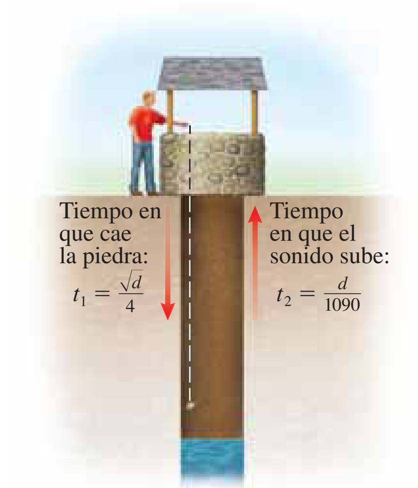
donde $K > 0$ es una constante y $x$ es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde no hay fuerza gravitacional neta que actúe sobre el objeto? (Exprese su respuesta a las mil millas más cercanas.)




**119. Profundidad de un pozo** Un método para determinar la profundidad de un pozo es dejar caer en él una piedra, y luego medir el tiempo que tarda la caída hasta que se escucha el ruido de la piedra al tocar el agua. Si $d$ es la profundidad del pozo (en pies) y $t_1$ es el tiempo (en segundos) que tarda la piedra en caer, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Ahora, si $t_2$ es el tiempo que tarda el sonido en regresar, entonces $d = 1090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Por lo tanto, $t_2 = d/1090$. Así, el tiempo total transcurrido entre dejar caer la piedra y escuchar el ruido cuando cae es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Cuál es la profundidad del pozo si su tiempo total es 3 s?




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**120. Una familia de ecuaciones** La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones**, porque para cada valor de $k$ obtenemos una ecuación diferente con la incógnita $x$. La letra $k$ se llama **parámetro** para esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para $k$ para hacer que el valor determinado de $x$ sea una solución de la ecuación resultante?

**(a)** $x = 0$ **(b)** $x = 1$ **(c)** $x = 2$

**121. ¿Demostración de que 0 = 1?** Los siguientes pasos parecen dar ecuaciones equivalentes, que parecen demostrar que $1 = 0$. Encuentre el error.

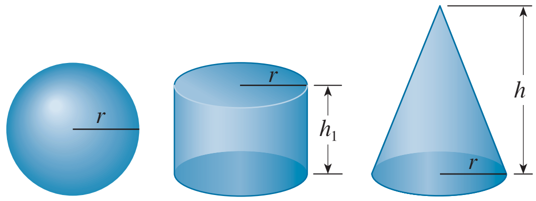
| | |
|---|---|
| $x = 1$ | Dada |
| $x^2 = x$ | Multiplique por $x$ |
| $x^2 - x = 0$ | Reste $x$ |
| $x(x - 1) = 0$ | Factorice |
| $\frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{0}{x-1}$ | Divida entre $x - 1$ |
| $x = 0$ | Simplifique |
| $1 = 0$ | Dada $x = 1$ |

**122. Volúmenes de sólidos** La esfera, el cilindro y el cono que se ven a continuación tienen todos ellos el mismo radio $r$ y el mismo volumen $V$.

**(a)** Use las fórmulas de volumen dadas al final de este libro, para demostrar que

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

**(b)** De estas ecuaciones despeje $h_1$ y $h_2$.




**123. Relación entre raíces y coeficientes** La fórmula cuadrática nos da las raíces de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También podemos obtener los coeficientes a partir de sus raíces. Por ejemplo, encuentre las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ y demuestre que el producto de las raíces es el término constante 20 y la suma de las raíces es 9, el negativo del coeficiente de $x$. Demuestre que la misma relación entre raíces y coeficientes se cumple para las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Use la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene raíces $r_1$ y $r_2$, entonces $c = r_1 r_2$ y $b = -(r_1 + r_2)$.

**124. Resolver una ecuación en formas diferentes** En esta sección hemos aprendido varias formas diferentes de resolver una ecuación. Algunas ecuaciones pueden abordarse en más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es de tipo cuadrático. Podemos resolverla haciendo $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando. O bien, podríamos despejar $\sqrt{x}$, elevar al cuadrado cada lado y luego resolver la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las siguientes ecuaciones usando ambos métodos indicados, y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

**(a)** $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrático; despeje el radical y eleve al cuadrado

**(b)** $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrático; multiplique por el MCD