

# 1.7 DESIGUALDADES

Resolución de desigualdades lineales ► Resolución de desigualdades no lineales ► Desigualdades con valor absoluto ► Modelado con desigualdades

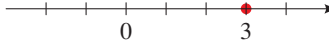

Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  o  $\geq$ . A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \leq 19$$

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no la satisfacen.

**Resolver** una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

$x$	$4x + 7 \leq 19$
1	$11 \leq 19$ ✓
2	$15 \leq 19$ ✓
3	$19 \leq 19$ ✓
4	$23 \leq 19$ ✗
5	$27 \leq 19$ ✗

	Solución	Gráfica
Ecuación: $4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad $4x + 7 \leq 19$	$x \leq 3$	

Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo  $\Leftrightarrow$  significa “es equivalente a”). En estas reglas los símbolos  $A$ ,  $B$  y  $C$  representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo  $\leq$ , pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

## REGLAS PARA DESIGUALDADES

### Regla

- $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$
- $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$
- Si  $C > 0$ , entonces  $A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$
- Si  $C < 0$ , entonces  $A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$
- Si  $A > 0$  y  $B > 0$ ,  
entonces  $A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
- Si  $A \leq B$  y  $C \leq D$ ,  
entonces  $A + C \leq B + D$

### Descripción

**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.

**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.

**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.

**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *negativa* invierte la dirección de la desigualdad.

**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas* invierte la dirección de la desigualdad.

Las desigualdades se pueden sumar.



Ponga especial atención a las Reglas 3 y 4. La Regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que **si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad.** Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por  $-2$ , obtenemos

$$-6 > -10$$

## ▼ Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

### EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad  $3x < 9x + 4$  y trace el conjunto solución.

#### SOLUCIÓN

$$3x < 9x + 4 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \quad \text{Reste } 9x$$

$$-6x < 4 \quad \text{Simplifique}$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\frac{1}{6}\right)(4) \quad \text{Multiplique por } -\frac{1}{6} \text{ e invierta la desigualdad}$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{Simplifique}$$

Multiplicar por el número negativo  $-\frac{1}{6}$  invierte la dirección de la desigualdad.



FIGURA 1

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a  $-\frac{2}{3}$ . En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo  $(-\frac{2}{3}, \infty)$ . Está graficada en la Figura 1.

#### • AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

### EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades  $4 \leq 3x - 2 < 13$ .

**SOLUCIÓN** El conjunto solución está formado por todos los valores de  $x$  que satisfacen las desigualdades  $4 \leq 3x - 2$  y  $3x - 2 < 13$ . Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4 \leq 3x - 2 < 13 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$6 \leq 3x < 15 \quad \text{Sume 2}$$

$$2 \leq x < 5 \quad \text{Divida entre 3}$$



FIGURA 2

Por lo tanto, el conjunto de solución es  $[2, 5)$ , como se ve en la Figura 2.

#### • AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

## ▼ Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

### EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad  $x^2 - 5x \leq -6$ , primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto  $(x - 2)(x - 3)$  debe ser negativo o cero, de modo que, para resolver la desigualdad, debemos determinar en dónde cada factor es negativo o positivo (porque el signo de un producto depende del signo de los factores). Los detalles se explican en el Ejemplo 3, en el que usamos la guía siguiente.

### GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

- 1. Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
- 2. Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
- 3. Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
- 4. Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
- 5. Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene  $\leq$  o  $\geq$ ).



La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

### EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad  $x^2 \leq 5x - 6$ .

**SOLUCIÓN** Seguiremos la guía dada líneas antes.

**Pase todos los términos a un lado.** Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \text{Reste } 5x, \text{ sume } 6$$

**Factorice.** Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \quad \text{Factorice}$$

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son  $x - 2$  y  $x - 3$ . Estos factores son cero cuando  $x$  es 2 y 3, respectivamente. Como se ve en la Figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Los factores  $x - 2$  y  $x - 3$  cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

**Haga una tabla o diagrama.** Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba**. Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores  $x - 2$  y  $x - 3$  en el número que escojamos. Para el intervalo  $(-\infty, 2)$ , escojamos el valor de prueba 1 (vea Figura 4). Sustituyendo 1 por  $x$  en los factores  $x - 2$  y  $x - 3$ , obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

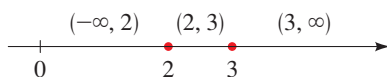


FIGURA 3

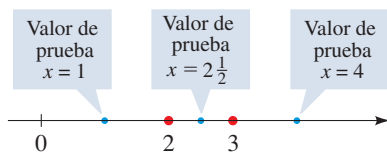


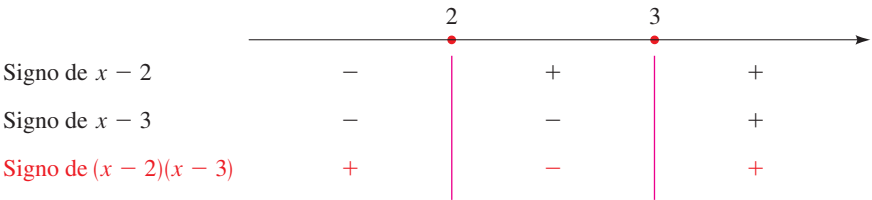
FIGURA 4

Por lo tanto ambos factores son negativos en este intervalo. Nótese que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores  $x - 2$  y  $x - 3$  no cambian signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

Usando los valores de prueba  $x = 2\frac{1}{2}$  y  $x = 4$  para los intervalos  $(2, 3)$  y  $(3, \infty)$  (vea Figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	−	+	+
Signo de $x - 3$	−	−	+
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	+	−	+

Si el lector así lo prefiere, puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:



**Resuelva.** Leemos de la tabla o el diagrama que  $(x - 2)(x - 3)$  es negativo en el intervalo  $(2, 3)$ . Entonces, la solución de la desigualdad  $(x - 2)(x - 3) \leq 0$  es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque buscamos valores de  $x$  tales que el producto es menor o *igual* a cero. La solución está ilustrada en la Figura 5.



FIGURA 5

• AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 41

**EJEMPLO 4**    |    Resolver una desigualdad con factores repetidos

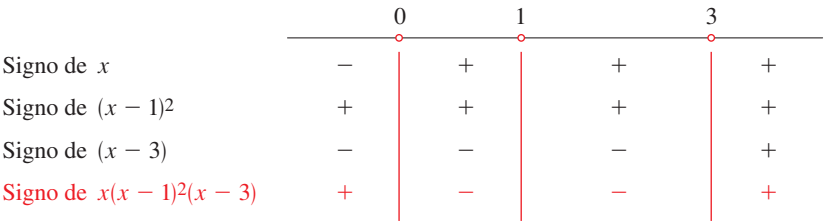
Resuelva la desigualdad  $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$ .

**SOLUCIÓN** Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empecemos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son  $x$ ,  $(x - 1)^2$  y  $x - 3$ . Éstos son cero cuando  $x = 0, 1, 3$ . Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

**Haga un diagrama.** Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.



**Resuelva.** Del diagrama vemos que  $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$  para  $x$  en el intervalo  $(0, 1)$  o para  $x$  en  $(1, 3)$ . Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos:

$$(0, 1) \cup (1, 3)$$

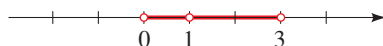


FIGURA 6

El conjunto solución está graficado en la Figura 6.

• AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

### EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad  $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$

#### SOLUCIÓN

**Pase todos los términos a un lado.** Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \quad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \quad \text{Denominador común } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \quad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \quad \text{Simplifique}$$

⚠ Es tentador simplemente multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $1-x$  (como se haría si fuera una ecuación.) Pero esto no funciona porque no sabemos si  $1-x$  es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Vea Ejercicio 123.)

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son  $2x$  y  $1-x$ . Éstos son cero cuando  $x$  es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

**Haga un diagrama.** Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

	$-\infty$	0	$1$	$\infty$
Signo de $2x$	-	-	+	+
Signo de $1-x$	+	+	-	-
Signo de $\frac{2x}{1-x}$	-	-	+	-

**Resuelva.** Del diagrama vemos que  $\frac{2x}{1-x} \geq 0$  para  $x$  en el intervalo  $[0, 1)$ . Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor o igual a 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$[0, 1)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 7.

• AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59



FIGURA 7

⚠ El Ejemplo 5 muestra que siempre debemos comprobar los puntos extremos del conjunto solución para ver si satisfacen la desigualdad original.

Estas propiedades se cumplen cuando  $x$  es sustituida por cualquier expresión algebraica. (En la figura supusimos que  $c > 0$ .)

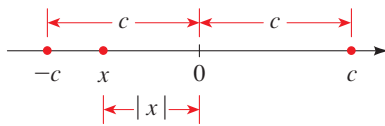


FIGURA 8

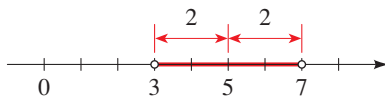


FIGURA 9

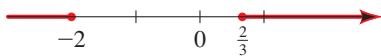


FIGURA 10

## Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

### PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $ x  < c$	$-c < x < c$	
2. $ x  \leq c$	$-c \leq x \leq c$	
3. $ x  > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $ x  \geq c$	$x \leq -c$ o $c \leq x$	

Estas propiedades se pueden demostrar con el uso de la definición de valor absoluto. Para demostrar la Propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad  $|x| < c$  dice que la distancia de  $x$  a 0 es menor que  $c$ , y de la Figura 8 vemos que esto es verdadero si y sólo si  $x$  está entre  $-c$  y  $c$ .

### EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad  $|x - 5| < 2$ .

**SOLUCIÓN 1** La desigualdad  $|x - 5| < 2$  es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \quad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \quad \text{Suma 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto  $(3, 7)$ .

**SOLUCIÓN 2** Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números  $x$  cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 9 vemos que éste es el intervalo  $(3, 7)$ .

• AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 79

### EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad  $|3x + 2| \geq 4$ .

**SOLUCIÓN** Por la Propiedad 4, la desigualdad  $|3x + 2| \geq 4$  es equivalente a

$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \quad 3x \leq -6 \quad \text{Reste 2}$$

$$x \geq \frac{2}{3} \quad x \leq -2 \quad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \text{ o } x \geq \frac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la Figura 10.

• AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 83

## Modelado con desigualdades

Modelar problemas prácticos lleva a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

**EJEMPLO 8** | Boletos para carnaval

Un carnaval tiene dos planes para boletos

Plan A: Cuota de \$5 la entrada y \$0.25 cada juego mecánico

Plan B: Cuota de \$2 la entrada y \$0.50 cada juego mecánico

¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

**SOLUCIÓN** **Identifique la variable.** Nos piden el número de viajes en juego mecánico para el cual es menos costoso que el Plan B. Por lo tanto, hacemos

$x$  = número de viajes en juego mecánico

**Convierta las palabras en álgebra.** La información del problema puede organizarse como sigue.

En palabras	En álgebra
Número de viajes	$x$
Costo con Plan A	$5 + 0.25x$
Costo con plan B	$2 + 0.50x$

**Formule el modelo.** A continuación formulamos el modelo.

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{costo con} \\ \text{Plan A} \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|} \hline \text{costo con} \\ \text{Plan B} \\ \hline \end{array}$$

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

**Resuelva.** A continuación despejamos  $x$ .

$$3 + 0.25x < 0.50x \quad \text{Reste 2}$$

$$3 < 0.25x \quad \text{Reste } 0.25x$$

$$12 < x \quad \text{Divida entre } 0.25$$

Entonces, si usted piensa tomar *más de* 12 viajes, el Plan A es menos costoso.

• **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 107**

**EJEMPLO 9** | Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse a una temperatura entre  $5^{\circ}\text{C}$  y  $30^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

**SOLUCIÓN** La relación entre grados Celsius ( $C$ ) y grados Fahrenheit ( $F$ ) está dada por la ecuación  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ . Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

Entonces las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

$$5 < \frac{5}{9}(F - 32) < 30 \quad \text{Sustituya } C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$\frac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \frac{9}{5} \cdot 30 \quad \text{Multiplique por } \frac{9}{5}$$

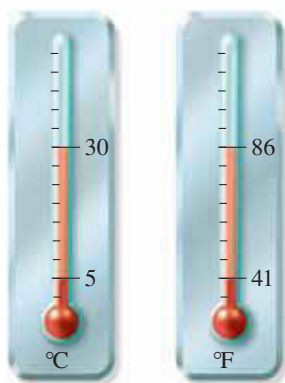
$$9 < F - 32 < 54 \quad \text{Simplifique}$$

$$9 + 32 < F < 54 + 32 \quad \text{Sume 32}$$

$$41 < F < 86 \quad \text{Simplifique}$$

La medicina debe conservarse a una temperatura entre  $41^{\circ}\text{F}$  y  $86^{\circ}\text{F}$ .

• **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 105**



## 1.7 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

- Llene el espacio en blanco con un signo de desigualdad apropiado.
  - Si  $x < 5$ , entonces  $x - 3$  \_\_\_\_ 2.
  - Si  $x \leq 5$ , entonces  $3x$  \_\_\_\_ 15.
  - Si  $x \geq 2$ , entonces  $-3x$  \_\_\_\_  $-6$ .
  - Si  $x < -2$ , entonces  $-x$  \_\_\_\_ 2.
- ¿Verdadero o falso?
  - Si  $x(x + 1) > 0$ , entonces  $x$  y  $x + 1$  son ambos positivos o ambos negativos.
  - Si  $x(x + 1) > 5$ , entonces  $x$  y  $x + 1$  son cada uno mayores a 5.
- (a) La solución de la desigualdad  $|x| \leq 3$  es el intervalo \_\_\_\_\_.  
 (b) La solución de la desigualdad  $|x| \geq 3$  es una unión de dos intervalos \_\_\_\_  $\cup$  \_\_\_\_.
- (a) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es menor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto  $|x|$  \_\_\_\_\_.  
 (b) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es mayor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto  $|x|$  \_\_\_\_\_.

## HABILIDADES

**5–10 ■** Sea  $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$ . Determine cuáles elementos de  $S$  satisfacen la desigualdad.

- $3 - 2x \leq \frac{1}{2}$
- $2x - 1 \geq x$
- $1 < 2x - 4 \leq 7$
- $-2 \leq 3 - x < 2$
- $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$
- $x^2 + 2 < 4$

**11–34 ■** Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

- $2x \leq 7$
- $-4x \geq 10$
- $2x - 5 > 3$
- $3x + 11 < 5$
- $7 - x \geq 5$
- $5 - 3x \leq -16$
- $2x + 1 < 0$
- $0 < 5 - 2x$
- $3x + 11 \leq 6x + 8$
- $6 - x \geq 2x + 9$
- $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$
- $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$
- $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$
- $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$
- $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$
- $2(7x - 3) \leq 12x + 16$
- $2 \leq x + 5 < 4$
- $5 \leq 3x - 4 \leq 14$
- $-1 < 2x - 5 < 7$
- $1 < 3x + 4 \leq 16$
- $-2 < 8 - 2x \leq -1$
- $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{6} < \frac{2x - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$
- $-\frac{1}{2} \leq \frac{4 - 3x}{5} \leq \frac{1}{4}$

**35–72 ■** Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

- $(x + 2)(x - 3) < 0$
- $(x - 5)(x + 4) \geq 0$
- $x(2x + 7) \geq 0$
- $x(2 - 3x) \leq 0$
- $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
- $x^2 + 5x + 6 > 0$
- $2x^2 + x \geq 1$
- $x^2 < x + 2$
- $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$
- $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$
- $x^2 > 3(x + 6)$
- $x^2 + 2x > 3$
- $x^2 < 4$
- $x^2 \geq 9$
- $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$
- $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$
- $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$
- $(x + 3)^2(x + 1) > 0$
- $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \leq 0$
- $x^2(x^2 - 1) \geq 0$
- $x^3 - 4x > 0$
- $16x \leq x^3$
- $\frac{x - 3}{x + 1} \geq 0$
- $\frac{2x + 6}{x - 2} < 0$
- $\frac{4x}{2x + 3} > 2$
- $-2 < \frac{x + 1}{x - 3}$
- $\frac{2x + 1}{x - 5} \leq 3$
- $\frac{3 + x}{3 - x} \geq 1$
- $\frac{4}{x} < x$
- $\frac{x}{x + 1} > 3x$
- $1 + \frac{2}{x + 1} \leq \frac{2}{x}$
- $\frac{3}{x - 1} - \frac{4}{x} \geq 1$
- $\frac{6}{x - 1} - \frac{6}{x} \geq 1$
- $\frac{x + 2}{x + 3} < \frac{x - 1}{x - 2}$
- $\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x + 1} + 4$
- $x^4 > x^2$
- $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} \leq 0$
- $72. x^5 > x^2$

**73–88 ■** Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

- $|x| \leq 4$
- $|3x| < 15$
- $|2x| > 7$
- $\frac{1}{2}|x| \geq 1$
- $|x - 5| \leq 3$
- $|x + 1| \geq 1$
- $|2x - 3| \leq 0.4$
- $|5x - 2| < 6$
- $|3x - 2| \geq 5$
- $|8x + 3| > 12$
- $\left| \frac{x - 2}{3} \right| < 2$
- $\left| \frac{x + 1}{2} \right| \geq 4$
- $|x + 6| < 0.001$
- $3 - |2x + 4| \leq 1$
- $8 - |2x - 1| \geq 6$
- $7|x + 2| + 5 > 4$

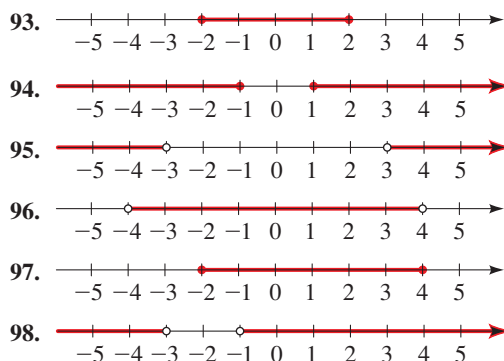
**88–92 ■** Se da una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contenga un valor absoluto.

- Todos los números reales  $x$  menos 3 unidades desde 0



90. Todos los números reales  $x$  más 2 unidades desde 0  
 91. Todos los números reales  $x$  menos 5 unidades desde 7  
 92. Todos los números reales  $x$  como máximo 4 desde 2

93–98 ■ Se grafica un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.



99–102 ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como número real.

99.  $\sqrt{16 - 9x^2}$       100.  $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

101.  $\left(\frac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$       102.  $\sqrt[4]{\frac{1-x}{2+x}}$

103. De la desigualdad despeje  $x$ , suponiendo que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes positivas.

(a)  $a(bx - c) \geq bc$       (b)  $a \leq bx + c < 2a$

104. Suponga que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

## APLICACIONES

105. **Escalas de temperatura** Use la relación entre  $C$  y  $F$  dada en el Ejemplo 9 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura  $20 \leq C \leq 30$ .
106. **Escalas de temperatura** ¿Cuál intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura  $50 \leq F \leq 95$ ?
107. **Costo de renta de un auto** Una compañía de renta de autos ofrece dos planes para renta de un auto.  
 Plan A: \$30 por día y \$0.10 por milla  
 Plan B: \$50 por día con kilometraje ilimitado
108. **Costo de llamadas de larga distancia** Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia.  
 Plan A: \$25 por mes y \$0.05 por minuto  
 Plan B: \$5 por mes y \$0.12 por minuto  
 ¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B?

109. **Costo de manejar un auto** Se estima que el costo anual de manejar cierto auto nuevo está dado por la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde  $m$  representa el número de millas recorridas por año y  $C$  es el costo en dólares. Juana compró ese auto y decide presupuestar entre \$6400 y \$7100 para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que ella puede manejar su nuevo auto?

110. **Temperatura del aire** Cuando el aire asciende, se dilata y, al dilatarse, se enfría a razón de alrededor de  $1^\circ\text{C}$  por cada 100 metros de ascenso hasta unos 12 km.

- (a) Si la temperatura del suelo es de  $20^\circ\text{C}$ , escriba una fórmula para la temperatura a una altura  $h$ .  
 (b) ¿Qué intervalo de temperaturas se puede esperar si un avión despegue y alcanza una altitud máxima de 5 km?

111. **Precio de boleto en una aerolínea** Una aerolínea que hace vuelos especiales encuentra que, en sus vuelos de sábados de Filadelfia a Londres, los 120 asientos se venderán si el precio es de \$200. No obstante, por cada aumento de \$3 en el precio del boleto, el número de asientos disminuye en uno.

- (a) Encuentre una fórmula para el número de asientos vendidos si el precio del boleto es de  $P$  dólares.  
 (b) Durante cierto período, el número de asientos vendidos para este vuelo variaban entre 90 y 115. ¿Cuál era la variación correspondiente de precios de boletos?

112. **Precisión de una báscula** Un comerciante de café vende a un cliente 3 lb de café Hawaiian Kona a \$6.50 por libra. La báscula del comerciante es precisa con variación no mayor de  $\pm 0.03$  lb. ¿Cuánto podría haberse cobrado de más o de menos al cliente por la posible imprecisión de la báscula?

113. **Gravedad** La fuerza gravitacional  $F$  ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que tiene una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4,000,000}{d^2}$$

donde  $d$  es la distancia (en km) del objeto desde el centro de la Tierra, y la fuerza  $F$  se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias será entre 0.0004 N y 0.01 N la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre este cuerpo?

114. **Temperatura de una fogata** En la cercanía de una fogata, la temperatura  $T$  en  $^\circ\text{C}$  a una distancia de  $x$  metros del centro de la fogata está dada por

$$T = \frac{600,000}{x^2 + 300}$$

¿A qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a  $500^\circ\text{C}$ ?



- 115. Una pelota en caída** Usando cálculo, se puede demostrar que si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 pies/s desde lo alto de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura  $h$  sobre el suelo  $t$  segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota al menos a 32 pies sobre el suelo?

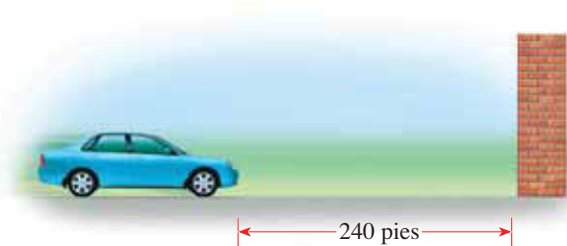


- 116. Rendimiento de gasolina** El rendimiento de gasolina  $g$  (medido en millas/gal) para un auto en particular, manejado a  $v$  mi/h, está dado por la fórmula  $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$ , mientras  $v$  esté entre 10 mi/h y 75 mi/h. ¿Para qué intervalo de velocidades el rendimiento del vehículo será de 30 mi/gal o mejor?

- 117. Distancia de parada** Para cierto modelo de auto, la distancia  $d$  requerida para parar el vehículo si está corriendo a  $v$  mi/h está dada por la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde  $d$  se mide en pies. Kerry desea que su distancia de parada no rebase los 240 pies. ¿A qué intervalo de velocidades puede manejar ella?



- 118. Utilidades de un fabricante** Si un fabricante vende  $x$  unidades de cierto producto, el ingreso  $R$  y el costo  $C$  (en dólares) están dados por

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Utilice el hecho de que

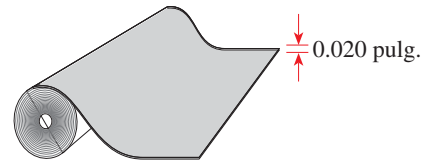
$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}$$

para determinar cuántas unidades debe vender el fabricante para disfrutar de una utilidad de al menos \$2400.

- 119. Cercar un jardín** Una jardinera tiene 120 pies de cerca resistente a venados. Ella desea encerrar un jardín rectangular de verduras en su patio trasero, y que el área encerrada sea al menos de 800 pies<sup>2</sup>. ¿Qué intervalo de valores es posible para la longitud de su jardín?

- 120. Grueso de un laminado** Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con base de nylon) de 0.020 pulgadas de grosor, con una tolerancia de 0.003 pulgadas.

- (a) Encuentre una desigualdad que contenga valores absolutos que describa el intervalo del posible grosor para el laminado.  
(b) Resuelva la desigualdad que haya encontrado en la parte (a).



- 121. Intervalo de estatura** El promedio de estatura de hombres adultos es de 68.2 pulgadas y 95% de ellos tiene una estatura  $h$  que satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \leq 2$$

Resuelva la desigualdad para hallar el intervalo de estaturas.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 122. ¿Las potencias preservan el orden?** Si  $a < b$ , ¿ $a^2 < b^2$ ? (Verifique valores positivos y negativos para  $a$  y  $b$ .) Si  $a < b$ , ¿ $a^3 < b^3$ ? Con base en sus observaciones, exprese una regla general acerca de la relación entre  $a^n$  y  $b^n$  cuando  $a < b$  y  $n$  es un entero positivo.

- 123. ¿Qué está mal aquí?** Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver  $1 < 3/x$  multiplicando ambos lados por  $x$ , para obtener  $x < 3$ , de modo que la solución sería  $(-\infty, 3)$ . Pero eso está mal; por ejemplo,  $x = -1$  está en el intervalo pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense en el *signo* de  $x$ ). A continuación resuelva correctamente la desigualdad.

- 124. Uso de distancias para resolver desigualdades de valor absoluto** Recuerde que  $|a - b|$  es la distancia entre  $a$  y  $b$  en la recta numérica. Para cualquier número  $x$ , ¿qué representan  $|x - 1| < |x - 3|$ ? Use esta interpretación para resolver la desigualdad  $|x - 1| < |x - 3|$  geoméricamente. En general, si  $a < b$ , ¿cuál es la solución de la desigualdad  $|x - a| < |x - b|$ ?