12.6 EL TEOREMA DEL BINOMIO

Expansión de $(a + b)^n$ ▶ Los coeficientes de un binomio ▶ El Teorema del Binomio ▶ Demostración del Teorema del Binomio

Una expresión de la forma $a + b$ se denomina **binomio**. Aun cuando en principio es fácil elevar $a + b$ a cualquier potencia, elevarlo a una potencia muy alta sería tedioso. En esta sección encontramos una fórmula que da la expansión de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n y luego la demostramos usando inducción matemática.

Expansión de $(a + b)^n$

Para hallar un patrón en la expansión de $(a + b)^n$, primero buscamos algunos casos especiales.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

Los siguientes patrones sencillos emergen para la expansión de $(a + b)^n$.

1. Hay $n + 1$ términos, siendo el primero a^n y el último es b^n.
2. Los exponentes de a disminuyen en 1 de término en término, en tanto que los exponentes de b aumentan en 1.
3. La suma de los exponentes de a y b de cada término es n.

Por ejemplo, observe cómo los exponentes de a y b se comportan en la expansión de $(a + b)^5$.

Los exponentes de *a* disminuyen:

$$(a+b)^5 = a^{5} + 5a^{4}b^1 + 10a^{3}b^2 + 10a^{2}b^3 + 5a^{1}b^4 + b^5$$

Los exponentes de *b* aumentan:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b^{1} + 10a^3b^{2} + 10a^2b^{3} + 5a^1b^{4} + b^{5}$$

Con estas observaciones podemos escribir la forma de la expansión de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n. Por ejemplo, escribiendo un signo de interrogación para los coeficientes faltantes, tenemos

$$(a+b)^8 = a^8 + \boxed{?}\,a^7b + \boxed{?}\,a^6b^2 + \boxed{?}\,a^5b^3 + \boxed{?}\,a^4b^4 + \boxed{?}\,a^3b^5 + \boxed{?}\,a^2b^6 + \boxed{?}\,ab^7 + b^8$$

Para completar la expansión, necesitamos determinar estos coeficientes. Para hallar un patrón, escribamos los coeficientes de la expansión de $(a + b)^n$ para los primeros pocos valores de n en un arreglo triangular de números como se muestra a continuación, que se llama **triángulo de Pascal**.

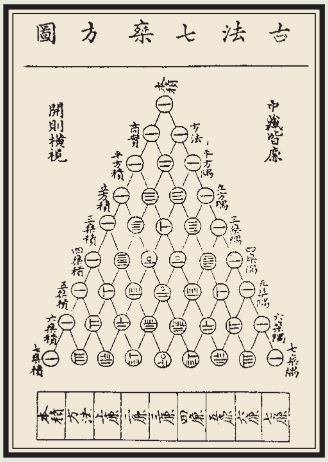
$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

El conjunto de números correspondiente a $(a + b)^0$ se denomina renglón cero y se incluye para demostrar la simetría del conjunto de números. La observación clave acerca del triángulo de Pascal es la siguiente propiedad.

PROPIEDAD CLAVE DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Todo elemento (que no sea un 1) es la suma de los dos elementos que están diagonalmente sobre él.

Lo que llamamos **triángulo de Pascal** aparece en este documento chino de Chu Shikie, datado en 1303. El título dice: "Tabla del Método Antiguo de los siete cuadros de multiplicación." El triángulo fue redescubierto por Pascal (vea página 818).



De esta propiedad es fácil hallar cualquier renglón del triángulo de Pascal a partir del renglón de arriba de él. Por ejemplo, encontramos los renglones sexto y séptimo empezando con el quinto renglón:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Para ver por qué se cumple esta situación, consideremos las siguientes expansiones:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Llegamos a la expansión de $(a+b)^6$ si multiplicamos $(a+b)^5$ por $(a+b)$. Observe, por ejemplo, que el término circulado de la expansión de $(a+b)^6$ se obtiene por la multiplicación de los dos términos circulados que están encima de él. Obtenemos este término cuando los dos términos sobre él se multiplican por b y a, respectivamente. Entonces, su coeficiente es la suma de los coeficientes de estos dos términos. Usaremos esta observación al final de esta sección cuando demostremos el Teorema del Binomio.

Habiendo encontrado estos patrones, fácilmente podemos ahora obtener la expansión de cualquier binomio, al menos a potencias relativamente pequeñas.

EJEMPLO 1 | Expansión de un binomio usando el triángulo de Pascal

Encuentre la expansión $(a+b)^7$ usando el triángulo de Pascal.

SOLUCIÓN El primer término de la expansión es a^7 y el último término es b^7. Usando el hecho de que el exponente de a disminuye en 1 de un término a otro y que b aumenta en 1 de un término a otro, tenemos

$$(a+b)^7 = a^7 + \,?\,a^6b + \,?\,a^5b^2 + \,?\,a^4b^3 + \,?\,a^3b^4 + \,?\,a^2b^5 + \,?\,ab^6 + b^7$$

Los coeficientes apropiados aparecen en el séptimo renglón del triángulo de Pascal. Así,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

EJEMPLO 2 | Expansión de un binomio usando el triángulo de Pascal

Use el triángulo de Pascal para expandir $(2-3x)^5$.

SOLUCIÓN Encontramos la expansión de $(a+b)^5$ y luego sustituimos 2 por a y $-3x$ por b. Usando el triángulo de Pascal para los coeficientes, obtenemos

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Sustituyendo $a = 2$ y $b = -3x$ resulta

$$\begin{aligned}(2-3x)^5 &= (2)^5 + 5(2)^4(-3x) + 10(2)^3(-3x)^2 + 10(2)^2(-3x)^3 + 5(2)(-3x)^4 + (-3x)^5 \\ &= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Los coeficientes de un binomio

Aun cuando el triángulo de Pascal es útil para hallar la expansión de binomios para valores razonablemente pequeños de n, no es práctico para hallar $(a+b)^n$ para grandes valores de n. La razón es que el método que usamos para hallar los renglones sucesivos del triángulo de Pascal es recursivo. Entonces, para hallar el 100-ésimo renglón de este triángulo, primero debemos hallar los 99 renglones precedentes.

Necesitamos examinar el patrón de los coeficientes con más cuidado para desarrollar una fórmula que nos permita calcular directamente cualquier coeficiente de la expansión de un binomio. Esa fórmula existe y el resto de esta sección está dedicado a hallarla y probarla, pero para expresar esta fórmula necesitamos alguna notación.

El producto de los primeros n números naturales está denotado por $\boldsymbol{n!}$ y se denomina ***n* factorial**.

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$
$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3{,}628{,}800$$

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}$$

También definimos 0! como sigue

$$\boxed{0! = 1}$$

Esta definición de 0! hace que muchas fórmulas donde intervienen factoriales sean más cortas y más fáciles de escribir.

EL COEFICIENTE DEL BINOMIO

Sean n y r enteros no negativos con $r \le n$. El **coeficiente del binomio** se denota con $\binom{n}{r}$ y está definido por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJEMPLO 3 | Cálculo de coeficientes de binomios

(a) $$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}}$$
$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

(b) $$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97} \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{(1 \cdot 2 \cdot 3)\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97)}}$$
$$= \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161{,}700$$

(c) $$\binom{100}{97} = \frac{100!}{97!(100-97)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97} \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97)}(1 \cdot 2 \cdot 3)}$$
$$= \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161{,}700$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **19**

Aun cuando el coeficiente del binomio $\binom{n}{r}$ se define en términos de una fracción, todos los resultados del Ejemplo 3 son números naturales. En realidad, $\binom{n}{r}$ es siempre un número natural (vea Ejercicio 54). Observe que los coeficiente del binomio en los incisos (b) y (c) del Ejemplo 3 son iguales. Éste es un caso especial de la siguiente razón, que pedimos al lector demostrar en el Ejercicio 52.

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Para ver la conexión entre los coeficientes del binomio y la expansión del binomio $(a + b)^n$, calculemos los siguientes coeficientes del binomio.

$$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$$

Éstos son precisamente los elementos del quinto renglón del triángulo de Pascal. De hecho, podemos escribir el triángulo de Pascal como sigue.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Para demostrar que este patrón se cumple, es necesario demostrar que cualquier elemento de esta versión del triángulo de Pascal sea la suma de los dos elementos que están diagonalmente arriba de él. En otras palabras, debemos demostrar que cada uno de los elementos satisface la propiedad clave del triángulo de Pascal. A continuación expresamos esta propiedad en términos de los coeficientes del binomio.

PROPIEDAD CLAVE DE LOS COEFICIENTES DEL BINOMIO

Para cualesquier enteros no negativos r y k con $r \leq k$,

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Nótese que los dos términos del lado izquierdo de esta ecuación son elementos adyacentes en el k-ésimo renglón del triángulo de Pascal, y el término del lado derecho es el elemento que está diagonalmente debajo de ellos, en el $(k + 1)$-ésimo renglón. Entonces esta ecuación es otra forma de expresar la propiedad clave del triángulo de Pascal en términos de los coeficientes del binomio. Una demostración de esta fórmula está en el Ejercicio 53.

▼ El Teorema del Binomio

Ahora estamos listos para expresar el Teorema del Binomio.

EL TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Demostramos este teorema al final de esta sección. Primero, veamos algunas de sus aplicaciones.

EJEMPLO 4 | Expansión de un binomio usando el Teorema del Binomio

Use el Teorema del Binomio para expandir $(x + y)^4$.

SOLUCIÓN Por el Teorema del Binomio,

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Verifique que

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Se deduce que

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

EJEMPLO 5 | Expansión de un binomio usando el Teorema del Binomio

Use el Teorema del Binomio para expandir $\left(\sqrt{x} - 1\right)^8$.

SOLUCIÓN Primero hallamos la expansión de $(a + b)^8$ y luego sustituimos $\sqrt{x}$ por a y -1 por b. Usando el Teorema del Binomio, tenemos

$$(a+b)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4$$
$$+ \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8$$

Verifique que

$$\binom{8}{0} = 1 \qquad \binom{8}{1} = 8 \qquad \binom{8}{2} = 28 \qquad \binom{8}{3} = 56 \qquad \binom{8}{4} = 70$$
$$\binom{8}{5} = 56 \qquad \binom{8}{6} = 28 \qquad \binom{8}{7} = 8 \qquad \binom{8}{8} = 1$$

Por lo tanto

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5$$
$$+ 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Ejecutando las sustituciones $a = x^{1/2}$ y $b = -1$ resulta

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^8 = (x^{1/2})^8 + 8(x^{1/2})^7(-1) + 28(x^{1/2})^6(-1)^2 + 56(x^{1/2})^5(-1)^3$$
$$+ 70(x^{1/2})^4(-1)^4 + 56(x^{1/2})^3(-1)^5 + 28(x^{1/2})^2(-1)^6$$
$$+ 8(x^{1/2})(-1)^7 + (-1)^8$$

Esto se simplifica a

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^8 = x^4 - 8x^{7/2} + 28x^3 - 56x^{5/2} + 70x^2 - 56x^{3/2} + 28x - 8x^{1/2} + 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

El Teorema del Binomio se puede usar para hallar un término particular de una expansión del binomio sin tener que hallar toda la expansión.

TÉRMINO GENERAL DE LA EXPANSIÓN DEL BINOMIO

El término que contiene a^r en la expansión de $(a + b)^n$ es

$$\binom{n}{n-r}a^r b^{n-r}$$

EJEMPLO 6 | Hallar un término particular en una expansión del binomio

Encuentre el término que contenga x^5 en la expansión de $(2x + y)^{20}$.

SOLUCIÓN El término que contiene x^5 está dado por la fórmula para el término general con $a = 2x$, $b = y$, $n = 20$ y $r = 5$. Entonces este término es

$$\binom{20}{15}a^5b^{15} = \frac{20!}{15!(20-15)!}(2x)^5y^{15} = \frac{20!}{15!\,5!}32x^5y^{15} = 496{,}128x^5y^{15}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 7 | Hallar un término particular en una expansión del binomio

Encuentre el coeficiente de x^8 en la expansión de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Tanto x^2 como $1/x$ son potencias de x, de modo que la potencia de x en cada término de la expansión está determinada por ambos términos del binomio. Para hallar el coeficiente requerido, primero encontramos el término general de la expansión. Por la fórmula tenemos $a = x^2$, $b = 1/x$ y $n = 10$, de modo que el término general es

$$\binom{10}{10-r}(x^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{2r}(x^{-1})^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{3r-10}$$

Entonces el término que contiene x^8 es el término en el que

$$3r - 10 = 8$$

$$r = 6$$

Por lo tanto, el coeficiente requerido es

$$\binom{10}{10-6} = \binom{10}{4} = 210$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

▼ Demostración del Teorema del Binomio

A continuación damos una demostración del Teorema del Binomio usando inducción matemática.

DEMOSTRACIÓN Denotemos con $P(n)$ el enunciado

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Paso 1 Demostramos que $P(1)$ es verdadero. Pero $P(1)$ es precisamente el enunciado

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = 1a + 1b = a + b$$

que es ciertamente verdadero.

Paso 2 Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

Usamos esto para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)[(a+b)^k] \\
&= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \\
&\quad + b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \\
&\quad + \binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2 \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} && \text{Agrupe términos semejantes}
\end{aligned}$$

Usando la propiedad clave de los coeficientes del binomio, podemos escribir cada una de las expresiones en corchetes como un solo coeficiente del binomio. También, escribiendo los coeficientes primero y último como $\binom{k+1}{0}$ y $\binom{k+1}{k+1}$ (éstos son iguales a 1 por el Ejercicio 50) resulta

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Pero esta última ecuación es precisamente $P(k+1)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo demostrado los Pasos 1 y 2, concluimos por el Principio de Inducción Matemática que el teorema es verdadero para todos los números naturales n. ■

12.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una expresión algebraica de la forma $a + b$, que está formada por una suma de dos términos, se denomina ________.

2. Podemos hallar los coeficientes de la expansión $(a+b)^n$ desde el n-ésimo renglón del triángulo de______. Entonces

$$(a+b)^4 = \blacksquare a^4 + \blacksquare a^3b + \blacksquare a^2b^2 + \blacksquare ab^3 + \blacksquare b^4$$

3. Los coeficientes del binomio se pueden calcular directamente usando la fórmula $\binom{n}{k}$ = _______. Entonces, $\binom{4}{3}$ = _______.

4. Para expandir $(a+b)^n$, podemos usar el Teorema del _________. Usando este teorema, encontramos $(a+b)^4$ =

$$\binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^4 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^3b + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^2b^2 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}ab^3 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}b^4$$

HABILIDADES

5-16 ■ Use el Triángulo de Pascal para expandir la expresión.

5. $(x+y)^6$ **6.** $(2x+1)^4$ **7.** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

8. $(x-y)^5$ **9.** $(x-1)^5$ **10.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$

11. $(x^2y-1)^5$ **12.** $(1+\sqrt{2})^6$ **13.** $(2x-3y)^3$

14. $(1+x^3)^3$ **15.** $\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^5$ **16.** $\left(2+\dfrac{x}{2}\right)^5$

17-24 ■ Evalúe la expresión.

17. $\dbinom{6}{4}$ **18.** $\dbinom{8}{3}$ **19.** $\dbinom{100}{98}$

20. $\dbinom{10}{5}$ **21.** $\dbinom{3}{1}\dbinom{4}{2}$ **22.** $\dbinom{5}{2}\dbinom{5}{3}$

23. $\dbinom{5}{0}+\dbinom{5}{1}+\dbinom{5}{2}+\dbinom{5}{3}+\dbinom{5}{4}+\dbinom{5}{5}$

24. $\dbinom{5}{0}-\dbinom{5}{1}+\dbinom{5}{2}-\dbinom{5}{3}+\dbinom{5}{4}-\dbinom{5}{5}$

25-28 ■ Use el Teorema del Binomio para expandir la expresión.

25. $(x+2y)^4$ **26.** $(1-x)^5$

27. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^6$ **28.** $(2A+B^2)^4$

29. Encuentre los primeros tres términos de la expresión de $(x+2y)^{20}$.

30. Encuentre los primeros cuatro términos de la expresión de $(x^{1/2}+1)^{30}$.

31. Encuentre los últimos dos términos de la expresión de $(a^{2/3}+a^{1/3})^{25}$.

32. Encuentre los primeros tres términos de la expresión de
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{40}$$

33. Encuentre el término de en medio de la expansión de $(x^2+1)^{18}$.

34. Encuentre el quinto término de la expansión de $(ab-1)^{20}$.

35. Encuentre el 24avo término de la expansión de $(a+b)^{25}$.

36. Encuentre el 28avo término de la expansión de $(A-B)^{30}$.

37. Encuentre el 100-ésimo término de la expansión de $(1+y)^{100}$.

38. Encuentre el segundo término de la expansión de
$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{25}$$

39. Encuentre el término que contenga a x^4 en la expansión de $(x+2y)^{10}$.

40. Encuentre el término que contenga a y^3 en la expansión de $(\sqrt{2}+y)^{12}$.

41. Encuentre el término que contenga a b^8 en la expansión de $(a+b^2)^{12}$.

42. Encuentre el término que no contiene a x en la expansión de
$$\left(8x+\frac{1}{2x}\right)^8$$

43-46 ■ Factorice usando el Teorema del Binomio.

43. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

44. $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

45. $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

46. $x^8+4x^6y+6x^4y^2+4x^2y^3+y^4$

47-52 ■ Simplifique usando el Teorema del Binomio.

47. $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ **48.** $\dfrac{(x+h)^4-x^4}{h}$

49. Demuestre que $(1.01)^{100}>2$. [*Sugerencia:* Observe que $(1.01)^{100}=(1+0.01)^{100}$, y use el Teorema del Binomio para demostrar que la suma de los primeros dos términos de la expansión es mayor que 2.]

50. Demuestre que $\dbinom{n}{0}=1$ y $\dbinom{n}{n}=1$.

51. Demuestre que $\dbinom{n}{1}=\dbinom{n}{n-1}=n$.

52. Demuestre que $\dbinom{n}{r}=\dbinom{n}{n-r}$ para $0\le r\le n$.

53. En este ejercicio demostramos la identidad
$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$$

(a) Escriba el lado izquierdo de esta ecuación como la suma de dos fracciones.

(b) Demuestre que un común denominador de la expresión que encontró en el inciso (a) es $r!(n-r+1)!$.

(c) Sume las dos fracciones usando el común denominador del inciso (b), simplifique el numerador y observe que la expresión resultante es igual al lado derecho de la ecuación.

54. Demuestre que $\binom{n}{r}$ es un entero para toda n y para $0\le r\le n$. [*Sugerencia:* Use inducción para demostrar que el enunciado es verdadero para toda n y use el Ejercicio 53 para el paso de inducción.]

APLICACIONES

55. Diferencia en volúmenes de cubos El volumen de un cubo de lado x pulgadas está dado por $V(x)=x^3$, de modo que el volumen de un cubo de lado $x+2$ pulgadas está dado por $V(x+2)=(x+2)^3$. Use el Teorema del Binomio para demostrar que la diferencia en volumen entre los cubos mayor y menor es $6x^2+12x+8$ pulgadas cúbicas.

56. Probabilidad de acertar en un blanco La probabilidad de que un arquero acierte en el blanco es $p=0.9$, de modo que la probabilidad de que falle a dar en el blanco es $q=0.1$. Se sabe que en esta situación la probabilidad de que el arquero acierte en el blanco exactamente r veces en n intentos está dada por el término que contiene p^r en la expansión del binomio de $(p+q)^n$. Encuentre la probabilidad de que el arquero acierte en el blanco exactamente tres veces en cinco intentos.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

57. Potencias de factoriales ¿Cuál es mayor, $(100!)^{101}$ o $(101!)^{100}$? [*Sugerencia:* Intente factorizando las expresiones. ¿Tienen factores en común?]

58. Sumas de coeficientes del binomio Sume cada uno de los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal, como se indica. ¿Se ve un patrón?

$$1 + 1 = \boxed{?}$$

$$1 + 2 + 1 = \boxed{?}$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = \boxed{?}$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = \boxed{?}$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = \boxed{?}$$

Con base en el patrón que haya encontrado, encuentre la suma del n-ésimo renglón:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Demuestre su resultado al expandir $(1 + 1)^n$ usando el Teorema del Binomio.

59. Sumas alternantes de coeficientes del binomio Encuentre la suma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

encontrando un patrón como en el Ejercicio 58. Pruebe su resultado al expandir $(1 - 1)^n$ usando el Teorema del Binomio.