2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ▶ Definición de función ▶ Evaluación de una función ▶ Dominio de una función ▶ Cuatro formas de representar una función

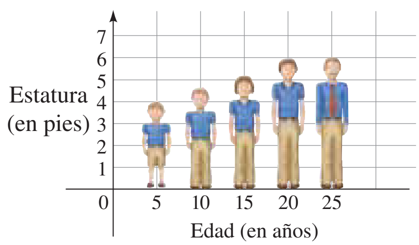
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

▼ Funciones a nuestro alrededor

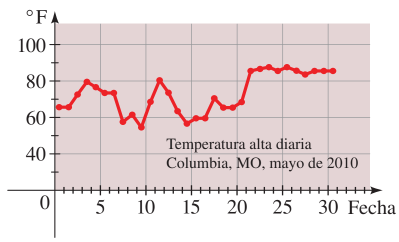
En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.



La estatura es función de la edad.



La temperatura es función de la fecha.

w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
$5 < w \le 6$	2.07

El porte es función del peso.

FIGURA 1

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

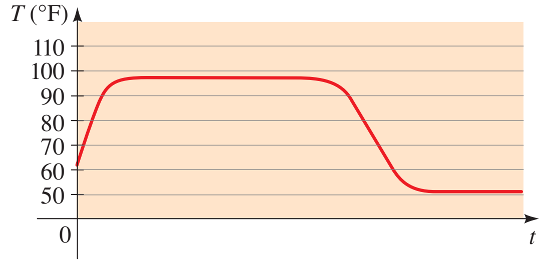


FIGURA 2 Gráfica de la temperatura T del agua como función del tiempo t

Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "elevar al cuadrado el número"

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

La tecla $\boxed{\sqrt{}}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{}}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{}}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

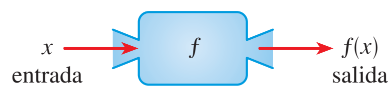


FIGURA 3 Diagrama de máquina de f

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

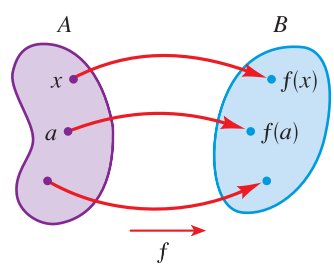


FIGURA 4 Diagrama de flecha de f

EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.
(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.
(c) Encuentre el dominio y rango de f.
(d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$
$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

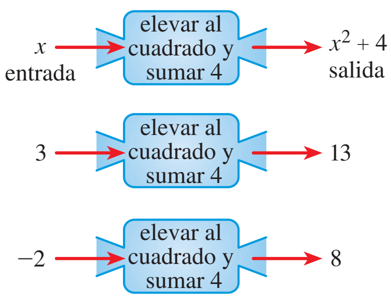


FIGURA 5 Diagrama de máquina

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43**

Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f(\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del Ejemplo 3 está definida por tramos.

Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27** ■

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

(c) $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

SOLUCIÓN

(a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35** ■

EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a h millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?

El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

(b) Construya una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

SOLUCIÓN

(a) Buscamos el valor de la función w cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

(b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \geq 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51**

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

> "Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32."

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

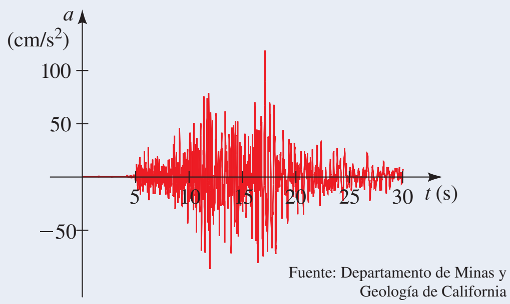
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

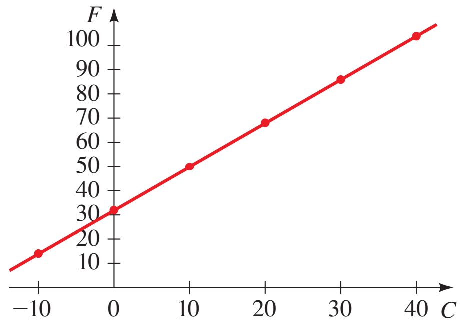


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de f en $x = a$.
2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina _____de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de f.
3. **(a)** ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x - 10}$$

(b) Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x - 4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.

(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

HABILIDADES

5-8 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

5. Sumar 3, luego multiplicar por 2
6. Dividir entre 7, luego restar 4
7. Restar 5, luego elevar al cuadrado
8. Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9. $h(x) = x^2 + 2$
10. $k(x) = \sqrt{x + 2}$
11. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$
12. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13. $f(x) = \sqrt{x - 1}$
14. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

15-16 ■ Complete la tabla.

15. $f(x) = 2(x - 1)^2$
16. $g(x) = |2x + 3|$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

x	$g(x)$
−3	
−2	
0	
1	
3	

17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17. $f(x) = x^2 - 6;\quad f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$
18. $f(x) = x^3 + 2x;\quad f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$
19. $f(x) = 2x + 1;$
$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a + b)$
20. $f(x) = x^2 + 2x;$
$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$
21. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x};$
$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a - 1), g(-1)$

22. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

23. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;

$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

24. $f(x) = x^3 - 4x^2$;

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

25. $f(x) = 2|x - 1|$;

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

26. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

28. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

31-34 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

31. $f(x) = x^2 + 1$; $f(x+2), f(x) + f(2)$

32. $f(x) = 3x - 1$; $f(2x), 2f(x)$

33. $f(x) = x + 4$; $f(x^2), (f(x))^2$

34. $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

35-42 ■ Encuentre $f(a)$, $f(a+h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

35. $f(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = 5$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

40. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

41. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

42. $f(x) = x^3$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. $f(x) = 2x$

44. $f(x) = x^2 + 1$

45. $f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

46. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

51. $f(x) = \sqrt{x-5}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

53. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

54. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

55. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

56. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

57. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

58. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

59. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

60. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

61. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

63. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

65-68 ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones **(a)** algebraica, **(b)** numérica y **(c)** gráfica para la función.

65. Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

66. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

67. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

APLICACIONES

69. Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

70. Área de una esfera El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

(a) Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

71. Ley de Torricelli Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

(a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

72. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

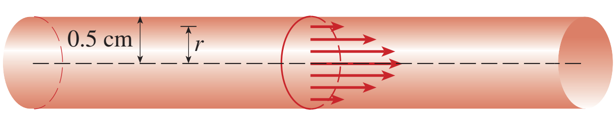
donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.

(a) Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.
(b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
(c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

73. Circulación sanguínea Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

(a) Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.
(b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?
(c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

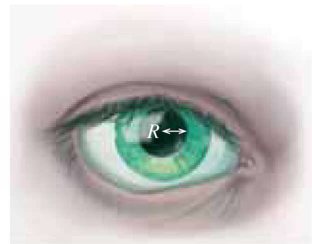


74. Tamaño de la pupila Cuando aumenta la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez apropiadas.

(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.
(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.



75. Relatividad Según la Teoría de la Relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz (300,000 km/s).

(a) Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.
(b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

76. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 0.08x & \text{si } 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20{,}000 < x \end{cases}$$

(a) Encuentre $T(5{,}000)$, $T(12{,}000)$, y $T(25{,}000)$.
(b) ¿Qué representan sus repuestas en el inciso (a)?

77. Compras por Internet Una librería de ventas por Internet cobra \$15 por envío de pedidos de menos de \$100 pero no cobra nada por pedidos de \$100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

78. Costo de una estancia en hotel Una cadena hotelera cobra \$75 por noche por las primeras dos noches y \$50 por cada noche adicional de estancia. El costo total T es una función del número de noches x que permanezca un huésped.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \boxed{} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa F por violar estos límites es de $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } 0 < x < 40 \\ \boxed{} & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \boxed{} & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

(b) Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

80. Altura de césped El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.

81. Cambio de temperatura Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

82. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

83. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	733	782	800	817	838	861	895

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

84. Ejemplos de funciones Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

85. Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.