2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ▶ Graficar funciones con calculadora graficadora ▶ Graficar funciones definidas por tramos ▶ La prueba de la recta vertical ▶ Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

▼ Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función f, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

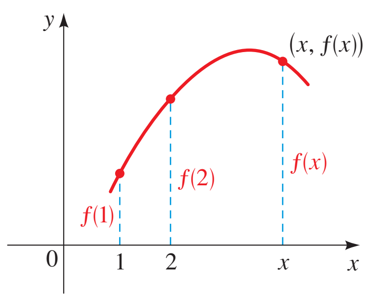
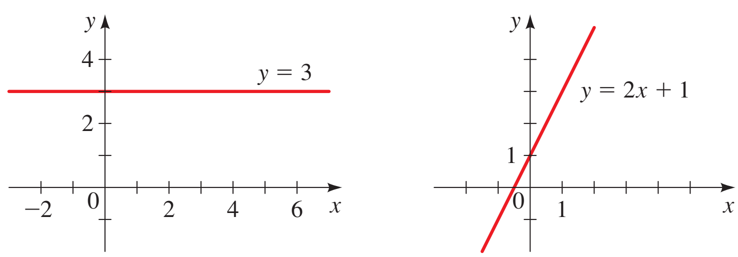


FIGURA 1 La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función f da un retrato del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (vea Figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un número determinado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La Figura 2 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.



La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN Primero hacemos una tabla de valores. A continuación, localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica. Las gráficas están trazadas en la Figura 3 en la página siguiente.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

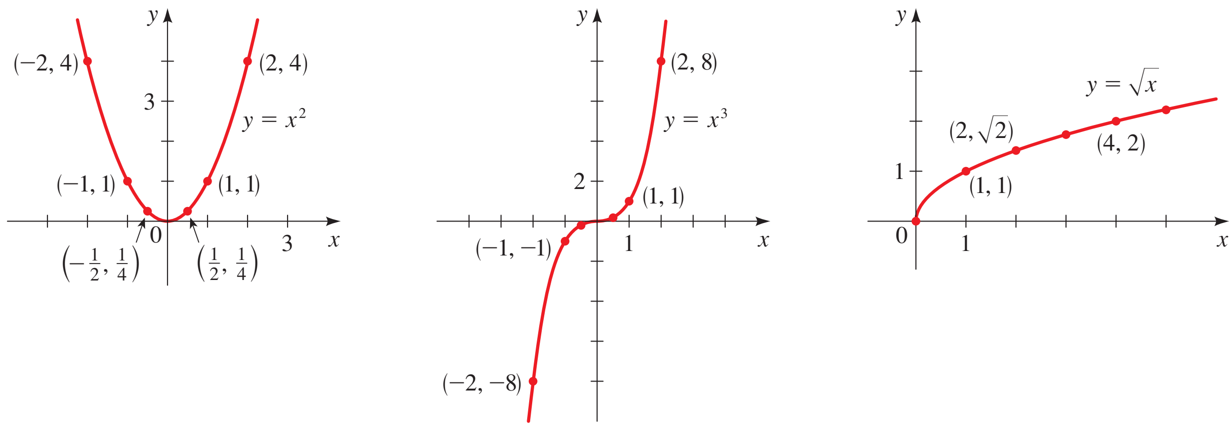


FIGURA 3 (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sqrt{x}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11, 15** Y **19**

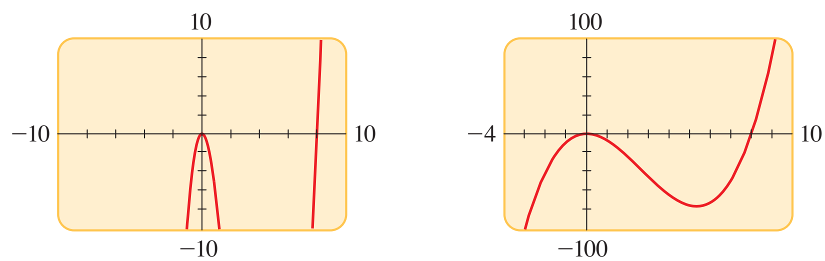
Graficar funciones con calculadora graficadora

Una forma cómoda de graficar una función es usar una calculadora graficadora. Como la gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, podemos usar los métodos de la Sección 1.9 para graficar funciones en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 2 | Graficar una función con calculadora graficadora

Use una calculadora graficadora para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN Para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$, debemos graficar la ecuación $y = x^3 - 8x^2$. En la calculadora graficadora TI-83, el rectángulo de vista predeterminado da la gráfica de la Figura 4(a). Pero esta gráfica parece rebasar la parte superior y la inferior de la pantalla. Necesitamos expandir el eje vertical para obtener una mejor representación de la gráfica. El rectángulo de vista $[-4, 10]$ por $[-100, 100]$ da un retrato más completo de la gráfica, como se ve en la Figura 4(b).



(a) (b)

FIGURA 4 Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

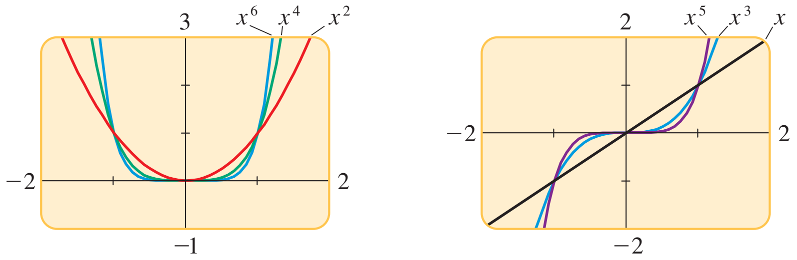
EJEMPLO 3 | Una familia de funciones potencia

(a) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2$, 4 y 6 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

(b) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1$, 3 y 5 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

(c) ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas gráficas?

SOLUCIÓN Para graficar la función $f(x) = x^n$, graficamos la ecuación $y = x^n$. Las gráficas para las partes (a) y (b) se muestran en la Figura 5.



(a) Potencias pares de x (b) Potencias impares de x

FIGURA 5 Una familia de funciones de potencia $f(x) = x^n$

(c) Vemos que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.
Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

Observe de la Figura 5 que cuando n crece, la gráfica de $y = x^n$ se hace más plana cerca de 0 y más pronunciado cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias inferiores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias superiores de x son las funciones dominantes.

Graficar funciones definidas por tramos

Una función definida por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Como es de esperarse, la gráfica de tal función está formada por tramos separados.

EJEMPLO 4 | Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de la función.

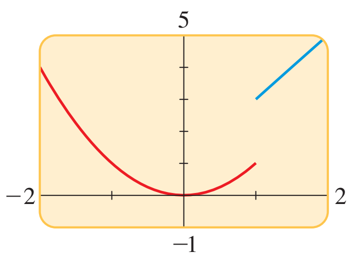
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$, y la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que trazamos en la Figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, y la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que graficamos en la Figura 2. Esto hace posible que tracemos la gráfica de la Figura 6.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

En varias calculadoras graficadoras, la gráfica de la Figura 6 puede ser producida al usar las funciones lógicas de la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

```
Y1=(X≤1)X²+(X>1)(2X+1)
```



(Para evitar la recta vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot`.)

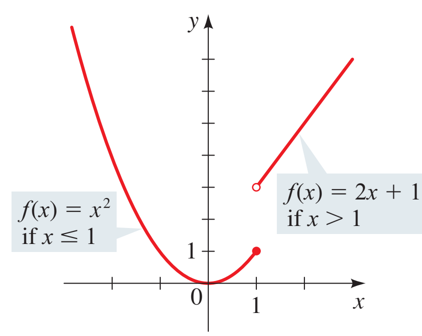


FIGURA 6

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el Ejemplo 4, observamos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (vea Figura 7).

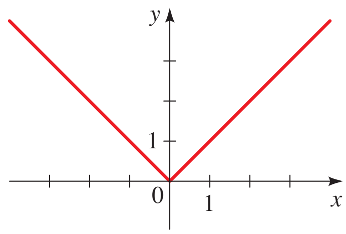


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = |x|$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

La **función entero** mayor está definida por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, y $[\![-0.5]\!] = -1$.

EJEMPLO 6 | Gráfica de la función entero mayor

Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Observe que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos, de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal, como se ve en la Figura 8.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

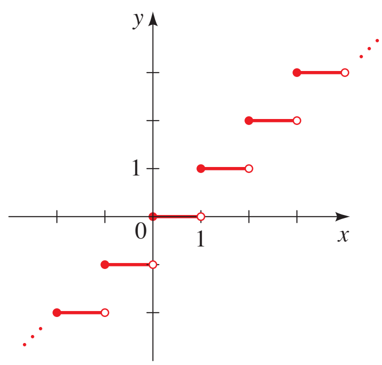


FIGURA 8 La función entero mayor, $y = [\![x]\!]$

La función entero mayor es un ejemplo de una **función escalón**. El siguiente ejemplo da un ejemplo real de una función escalón.

EJEMPLO 7 | La función de costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica de larga distancia diurna de Toronto, Canadá, a Mumbai, India, es de 69 centavos por el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Trace la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como función del tiempo t (en minutos).

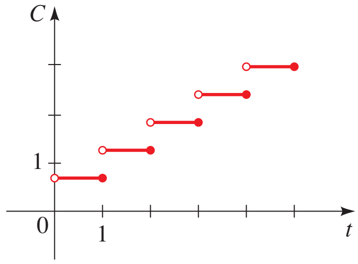


FIGURA 9 Costo de una llamada de larga distancia

SOLUCIÓN Sea $C(t)$ el costo por t minutos. Como $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información dada tenemos

$$
\begin{array}{ll}
C(t) = 0.69 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\
C(t) = 0.69 + 0.58 = 1.27 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\
C(t) = 0.69 + 2(0.58) = 1.85 & \text{si } 2 < t \leq 3 \\
C(t) = 0.69 + 3(0.58) = 2.43 & \text{si } 3 < t \leq 4
\end{array}
$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la Figura 9.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

Las funciones continuas están definidas en forma más precisa en la Sección 13.2, en la página 851.

Una función se llama **continua** si su gráfica no tiene "rupturas" o "huecos". Las funciones de los Ejemplos 1, 2, 3 y 5 son continuas; las funciones de los Ejemplos 4, 6 y 7 no son continuas.

La prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la prueba siguiente.

LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

Podemos ver de la Figura 10 por qué la Prueba de la Recta Vertical es verdadera. Si cada recta vertical $x = a$ cruza la curva sólo una vez en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ cruza la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

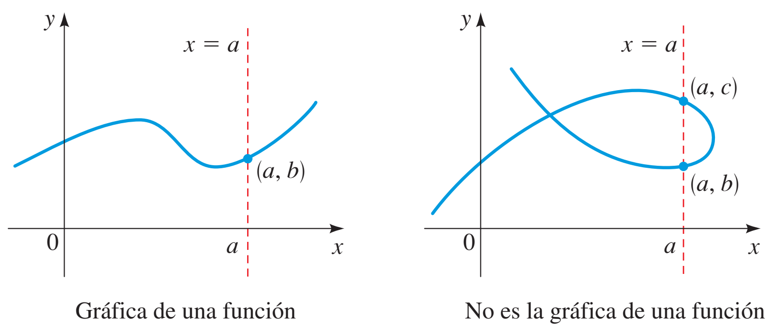


FIGURA 10 Prueba de la Recta Vertical

EJEMPLO 8 | Uso de la Prueba de la Recta Vertical

Usando la Prueba de la Recta Vertical, vemos que las curvas en las partes (b) y (c) de la Figura 11 representan funciones, mientras que las de las partes (a) y (d) no la representan.

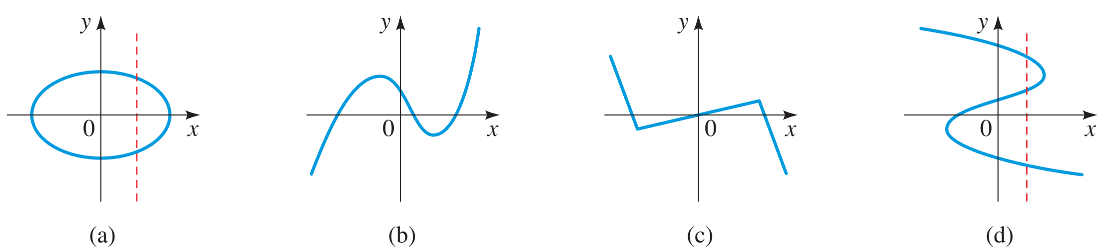


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación con las variables x y y define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre y y x. ¿Esta ecuación define a y como *función* de x? Para saberlo, despejamos y y obtenemos

$$y = x^2$$

Vemos que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de y por cada valor de x. Podemos expresar esta regla en notación de funciones como

$$f(x) = x^2$$

Pero no toda ecuación define a y como función de x, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como función de x?

(a) $y - x^2 = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN

(a) Despejando y en términos de x tendremos

$$y - x^2 = 2$$

$$y = x^2 + 2 \qquad \text{Sume } x^2$$

La última ecuación es una regla que da un valor de y por cada valor de x, de modo que define a y como función de x. Podemos escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

(b) Intentamos despejar y en términos de x:

$$x^2 + y^2 = 4$$

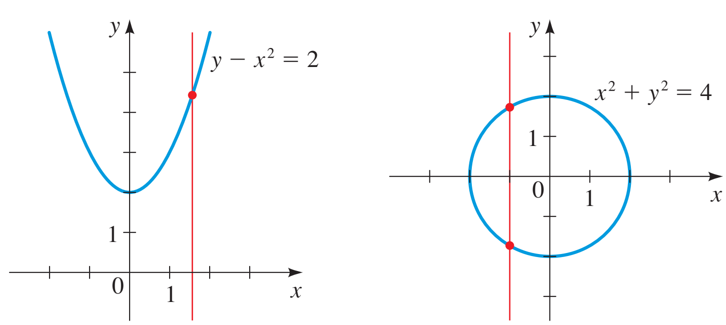
$$y^2 = 4 - x^2 \qquad \text{Reste } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

La última ecuación da dos valores de y por un valor dado de x. Entonces, la ecuación no define a y como una función de x.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **57** Y **61**

Las gráficas de las ecuaciones del Ejemplo 9 se ilustran en la Figura 12. La Prueba de la Recta Vertical muestra gráficamente que la ecuación del Ejemplo 9(a) define una función, pero la ecuación del Ejemplo 9(b) no la define.



(a) (b)

FIGURA 12

Stanford University News Service

DONALD KNUTH nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de Ciencias de la Computación en la Universidad de Stanford. Cuando Knuth era estudiante de secundaria, quedó fascinado con gráficas de funciones y laboriosamente dibujó cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (Hoy en día, desde luego, es mucho más fácil usar computadoras y calculadoras graficadoras para hacer esto.) Cuando todavía era estudiante graduado en el Caltech, empezó a escribir una monumental serie de libros titulada *The Art of Computer Programming*.

Knuth es famoso por su invento del ENTRA, que es un sistema de ajuste de tipos asistido por computadora. Este sistema fue utilizado en la preparación del manuscrito para este libro.

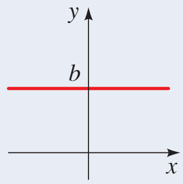
Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como Profesor Adjunto de la Academia de Ciencias de Francia, y como Miembro de Número de la Royal Society. El presidente Carter le otorgó la Medalla Nacional de Ciencias en 1979.

La tabla siguiente muestra las gráficas de algunas funciones que con frecuencia se ven en este libro.

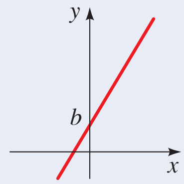
ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones lineales

$f(x) = mx + b$



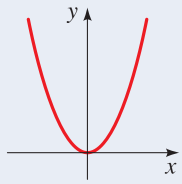
$f(x) = b$



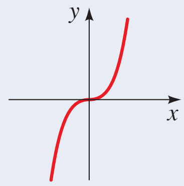
$f(x) = mx + b$

Funciones potencia

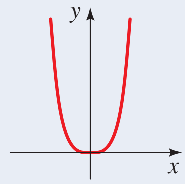
$f(x) = x^n$



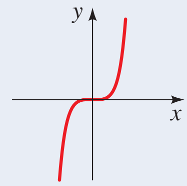
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



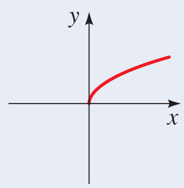
$f(x) = x^4$



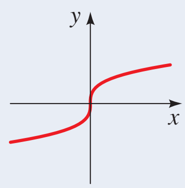
$f(x) = x^5$

Funciones raíz

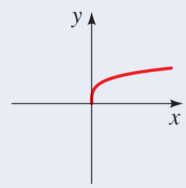
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



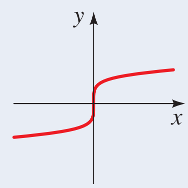
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$



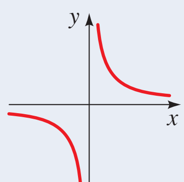
$f(x) = \sqrt[4]{x}$



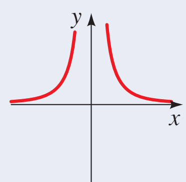
$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$



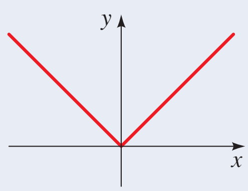
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto

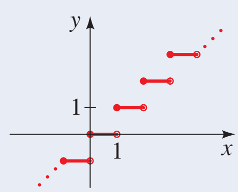
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero mayor

$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

2.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

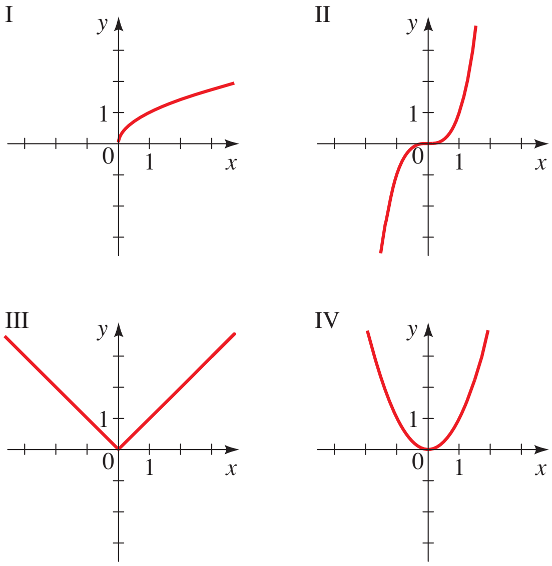
1. Para graficar la función f, localizamos los puntos $(x, \_)$ en un plano de coordenadas. Para graficar $f(x) = x^3 + 2$, localizamos los puntos $(x, \_)$. Por lo tanto, el punto $(2, \_\_\_)$ está sobre la gráfica de f. La altura de la gráfica de f arriba del eje x cuando $x = 2$ es ____.

2. Si $f(2) = 3$, entonces el punto $(2, \_\_\_)$ está sobre la gráfica de f.

3. Si el punto (2, 3) está sobre la gráfica de f, entonces $f(2) =$ ____.

4. Relacione la función con su gráfica.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = x^3$
(c) $f(x) = \sqrt{x}$ **(d)** $f(x) = |x|$



HABILIDADES

5-28 ■ Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

5. $f(x) = 2$ **6.** $f(x) = -3$

7. $f(x) = 2x - 4$ **8.** $f(x) = 6 - 3x$

9. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \le x \le 3$

10. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}, \quad 0 \le x \le 5$

11. $f(x) = -x^2$ **12.** $f(x) = x^2 - 4$

13. $h(x) = 16 - x^2$ **14.** $g(x) = (x-3)^2$

15. $g(x) = x^3 - 8$ **16.** $g(x) = (x+2)^3$

17. $g(x) = x^2 - 2x$ **18.** $h(x) = 4x^2 - x^4$

19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ **20.** $f(x) = \sqrt{x+4}$

21. $g(x) = -\sqrt{x}$ **22.** $g(x) = \sqrt{-x}$

23. $H(x) = |2x|$ **24.** $H(x) = |x+1|$

25. $G(x) = |x| + x$ **26.** $G(x) = |x| - x$

27. $f(x) = |2x - 2|$ **28.** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

29-32 ■ Grafique la función en cada uno de los rectángulos de vista dados, y seleccione el que produzca la gráfica más apropiada de la función.

29. $f(x) = 8x - x^2$
(a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-2, 10]$ por $[-5, 20]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100$

30. $g(x) = x^2 - x - 20$
(a) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-7, 7]$ por $[-25, 20]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

31. $h(x) = x^3 - 5x - 4$
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(b) $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-3, 3]$ por $[-10, 5]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

32. $k(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 2$
(a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$
(b) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(c) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

33-46 ■ Trace la gráfica de la función definida por tramos.

33. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

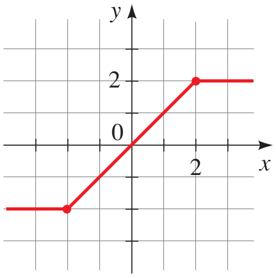
47-48 ■ Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función definida por tramos. (Vea la nota al margen, pág. 155.)

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

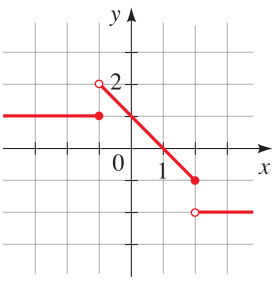
49-50 ■ Nos dan la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.

49.



$f(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } x < -2 \\ \boxed{} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \boxed{} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

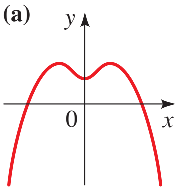
50.



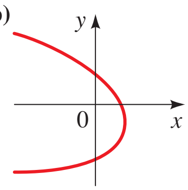
$f(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } x \leq -1 \\ \boxed{} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \boxed{} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

51-52 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x.

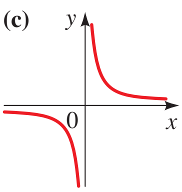
51. (a)



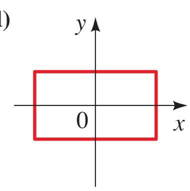
(b)



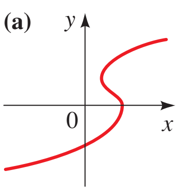
(c)



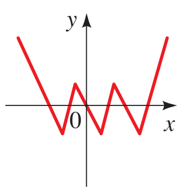
(d)



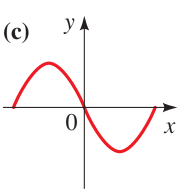
52. (a)



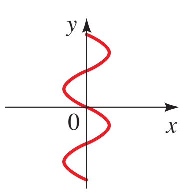
(b)



(c)

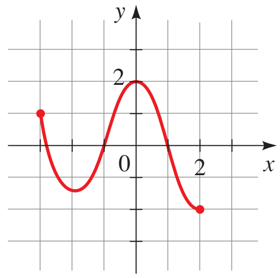


(d)

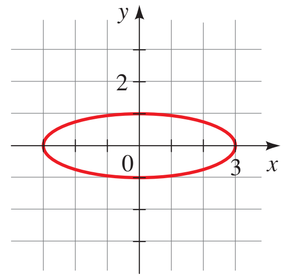


53-56 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, exprese el dominio y el rango de la función.

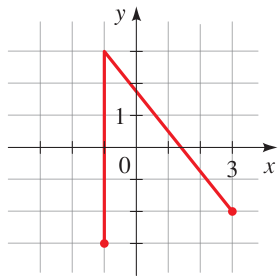
53.



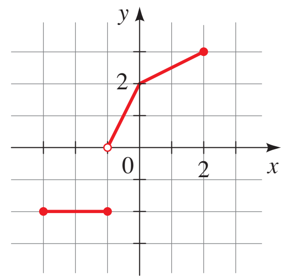
54.



55.



56.



57-68 ■ Determine si la ecuación define y como función de x. (Vea Ejemplo 9.)

57. $x^2 + 2y = 4$

58. $3x + 7y = 21$

59. $x = y^2$

60. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

61. $x + y^2 = 9$

62. $x^2 + y = 9$

63. $x^2y + y = 1$

64. $\sqrt{x} + y = 12$

65. $2|x| + y = 0$

66. $2x + |y| = 0$

67. $x = y^3$

68. $x = y^4$

69-74 ■ Nos dan una familia de funciones. En las partes (a) y (b) grafique en el rectángulo de vista indicado todos los miembros de la familia dados. En la parte (c) exprese las conclusiones que pueda hacer a partir de sus gráficas.

69. $f(x) = x^2 + c$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

70. $f(x) = (x - c)^2$
- **(a)** $c = 0, 1, 2, 3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -1, -2, -3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

71. $f(x) = (x - c)^3$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

72. $f(x) = cx^2$
- **(a)** $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

73. $f(x) = x^c$
- **(a)** $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$; $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$
- **(b)** $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$; $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

74. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

(a) $n = 1, 3;\quad [-3, 3]$ por $[-3, 3]$
(b) $n = 2, 4;\quad [-3, 3]$ por $[-3, 3]$
(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de n?

75-78 ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

75. El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

76. El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

77. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

78. La mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

APLICACIONES

79. Globo de meteorología Cuando se infla un globo de meteorología, el grueso T de la capa de caucho está relacionada con el globo mediante la ecuación

$$T(r) = \frac{0.5}{r^2}$$

donde T y r se miden en centímetros. Grafique la función T para valores de r entre 10 y 100.

80. Potencia generada por una turbina de viento La potencia producida por una turbina de viento depende de la velocidad del viento. Si un molino de viento tiene aspas de 3 metros de largo, entonces la potencia P producida por la turbina está modelada por

$$P(v) = 14.1v^3$$

donde P se mide en watts (W) y v se mide en metros por segundo (m/s). Grafique la función P para velocidades de viento entre 1 m/s y 10 m/s.

81. Tarifas de una empresa generadora de energía eléctrica Westside Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de \$6.00 por mes, más \$0.10 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh consumidos y \$0.06 por kWh por todo lo consumido de más de 300 kWh. Suponga que un cliente usa x kWh de electricidad en un mes.

(a) Exprese el costo mensual E como una función de x definida por tramos.
(b) Grafique la función E para $0 \le x \le 600$.

82. Función de un taxi Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de milla) y 20 centavos por cada décimo sucesivo de milla (o parte). Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función definida por partes de la distancia x recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

83. Tarifas postales La tarifa nacional de portes por cartas de primera clase, de 3.5 onzas o menos, es de 44 centavos por la primera onza (o menos), más 17 centavos por cada onza adicional (o parte de una onza). Exprese el porte P como una función definida por partes del peso x de una carta, con $0 < x \le 3.5$, y trace la gráfica de esta función.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

84. ¿Cuándo una gráfica representa a una función? Para todo entero n, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, es decir, $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no es* la gráfica de una función de x. ¿La gráfica de $x = y^3$ es una gráfica de la función de x? Si es así, ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué enteros n la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de x.

85. Funciones escalón En el Ejemplo 7 y los Ejercicios 82 y 83 nos dan funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos de recta horizontal. Es frecuente que tales funciones reciban el nombre de *funciones escalón*, porque sus gráficas se ven como escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que se ven en la vida diaria.

86. Funciones escalón alargadas Trace gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo están relacionadas? Si n es un entero positivo, ¿qué aspecto tiene la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

87. Gráfica del valor absoluto de una función

(a) Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

y

$$g(x) = |x^2 + x - 6|$$

¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

(b) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

(c) En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo están relacionadas las gráficas de f y g? Trace gráficas para ilustrar su respuesta.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Relaciones y funciones**

En este proyecto exploramos el concepto de función al compararlo con el concepto de una relación. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**