

2.7 FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

Funciones uno a uno ► La inversa de una función ► Graficar la inversa de una función

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa “deshace” o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno*.

▼ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.

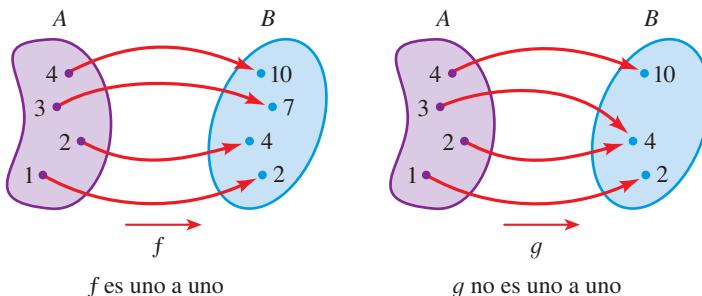


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

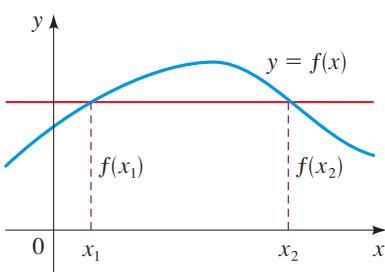


FIGURA 2 Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

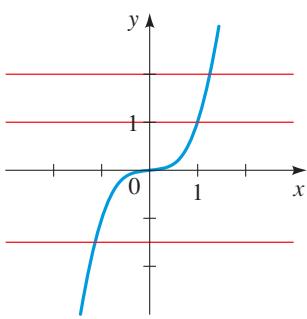


FIGURA 3 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

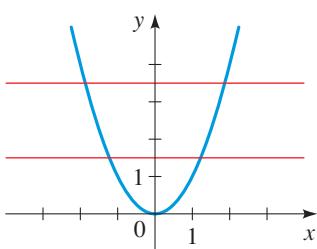


FIGURA 4 $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

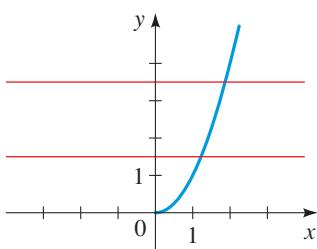


FIGURA 5 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) es uno a uno.

EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

Observe que la función f del Ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede demostrar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno*.

EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \quad \text{y} \quad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, g no es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

Aun cuando la función g del Ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \quad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede ver de la Figura 5 y de la Prueba de la Recta Horizontal.

EJEMPLO 3 | Demostrar que una función es uno a uno

Demuestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

SOLUCIÓN Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \quad \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2 \quad \text{Reste 4}$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11

▼ La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B . Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

para cualquier y en B .

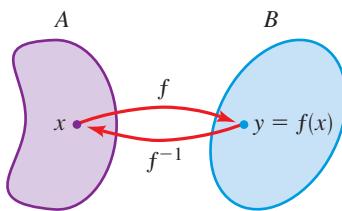


FIGURA 6

No confunda el -1 de f^{-1} por un exponente.

$$f^{-1}(x) \text{ no significa } \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

Esta definición dice que si f toma x por y , entonces f^{-1} regresa y a x . (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la Figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f . De la definición tenemos

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

EJEMPLO 4 | Hallar f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5, f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, hallar $f^{-1}(5), f^{-1}(7)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1} tenemos

$$f^{-1}(5) = 1 \text{ porque } f(1) = 5$$

$$f^{-1}(7) = 3 \text{ porque } f(3) = 7$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \text{ porque } f(8) = -10$$

La Figura 7 muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

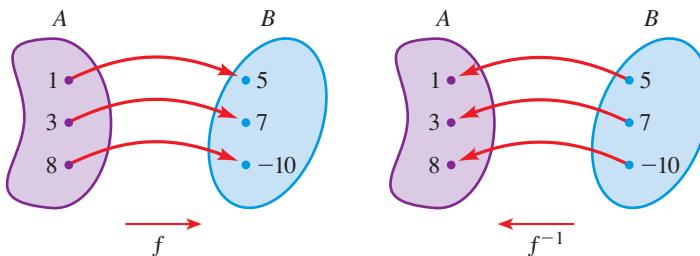


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

Por definición, la función inversa f^{-1} deshace lo que f hace: si empezamos con x , aplicamos f y luego aplicamos f^{-1} , llegamos otra vez a x , donde empezamos. Análogamente, f deshace lo que f^{-1} hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f . Estas observaciones se expresan precisamente como sigue.

PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B . La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } B$$

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f .

Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1} , de modo que decimos que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

EJEMPLO 5 | Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

SOLUCIÓN Observe que el dominio y rango de f y de g es \mathbb{R} . Tenemos

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x \\f(g(x)) &= f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Propiedad de Funciones Inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando son compuestas, se cancelan entre sí.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

Ahora examinemos la forma en que calculamos funciones inversas. Primero observamos de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Por tanto, si $y = f(x)$ y si podemos despejar x de esta ecuación en términos de y , entonces debemos tener $x = f^{-1}(y)$. Si entonces intercambiamos x y y , tenemos $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

CÓMO HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y . La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

En el Ejemplo 6, nótese la forma en que f^{-1} invierte el efecto de f . La función f es la regla “Multiplique por 3, luego reste 2”, mientras que f^{-1} es la regla “Sume 2, luego divida entre 3”.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa.

$$\begin{aligned}f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x - 2) \\&= \frac{(3x - 2) + 2}{3} \\&= \frac{3x}{3} = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x + 2}{3}\right) \\&= 3\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 2 \\&= x + 2 - 2 = x\end{aligned}$$

Observe que los Pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras, podemos intercambiar x y y primero y luego despejar y en términos de x .

EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos x de esta ecuación.

$$\begin{aligned}3x &= y + 2 && \text{Sume 2} \\x &= \frac{y + 2}{3} && \text{Divida entre 3}\end{aligned}$$

Finalmente, intercambiamos x y y .

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 37

EJEMPLO 7 | Hallar la inversa de una función

En el Ejemplo 7, observe que f^{-1} invierte el efecto de f . La función f es la regla “Tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2”, mientras que f^{-1} es la regla “Multiplique por 2, sume 3, luego tome la quinta potencia”.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) \\ &= \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} \\ &= (x^5 - 3 + 3)^{1/5} \\ &= (x^5)^{1/5} = x \\ f(f^{-1}(x)) &= f((2x + 3)^{1/5}) \\ &= \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} \\ &= \frac{2x + 3 - 3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x \quad \checkmark \end{aligned}$$

Las funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos x .

$$\begin{array}{ll} y = \frac{x^5 - 3}{2} & \text{Ecuación que define la función} \\ 2y = x^5 - 3 & \text{Multiplique por 2} \\ x^5 = 2y + 3 & \text{Sume 3 (y cambie lados)} \\ x = (2y + 3)^{1/5} & \text{Tome raíz quinta de cada lado} \end{array}$$

A continuación intercambiamos x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53**

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

EJEMPLO 8 | Hallar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (2x + 3)/(x - 1)$ y despejamos x .

$$\begin{array}{ll} y = \frac{2x + 3}{x - 1} & \text{Ecuación que define la función} \\ y(x - 1) = 2x + 3 & \text{Multiplique por } x - 1 \\ yx - y = 2x + 3 & \text{Desarrolle} \\ yx - 2x = y + 3 & \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo} \\ x(y - 2) = y + 3 & \text{Factorice } x \\ x = \frac{y + 3}{y - 2} & \text{Divida entre } y - 2 \end{array}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45** **Graficar la inversa de una función**

El principio de intercambiar x y y para hallar la función inversa también nos da un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f . Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1} . Pero obtenemos el punto (b, a) a partir del punto (a, b) al reflejar en la recta $y = x$ (vea la Figura 8 en la página siguiente). Por lo tanto, como lo ilustra la Figura 9 de la página siguiente, lo siguiente es verdadero.

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

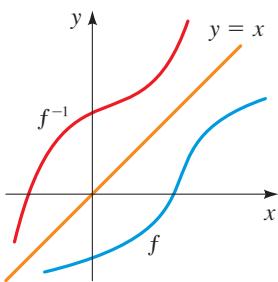


FIGURA 8

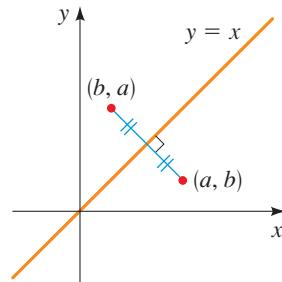


FIGURA 9

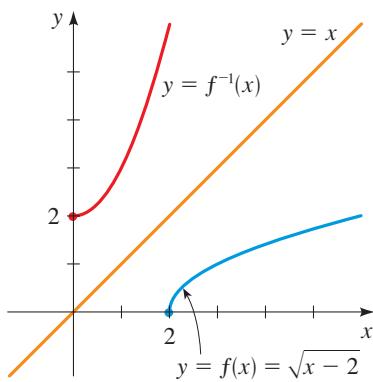


FIGURA 10

EJEMPLO 9 | Graficar la inversa de una función

- Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2}$.
- Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1} .
- Encuentre la ecuación de f^{-1} .

SOLUCIÓN

- Usando las transformaciones desde la Sección 2.5, trazamos la gráfica de $y = \sqrt{x - 2}$ al hallar los puntos de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c) de la Sección 2.2) y moverla a la derecha 2 unidades.
- La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f de la parte (a) al reflejarla en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 10.
- De la ecuación $y = \sqrt{x - 2}$ despeje x , observando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x - 2} = y$$

$$x - 2 = y^2$$

Eleva al cuadrado cada uno de los lados

$$x = y^2 + 2 \quad y \geq 0 \quad \text{Sume 2}$$

Intercambie x y y :

$$y = x^2 + 2 \quad x \geq 0$$

$$\text{Por lo tanto} \quad f^{-1}(x) = x^2 + 2 \quad x \geq 0$$

Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la Figura 10, esto parece razonable.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 63

2.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

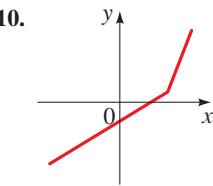
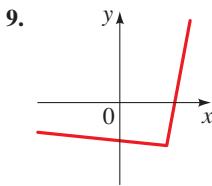
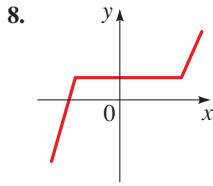
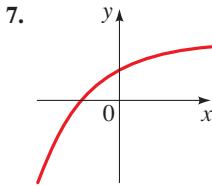
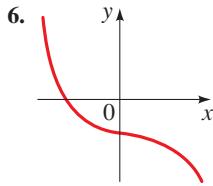
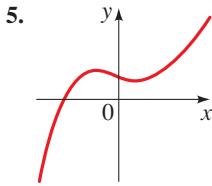
- Una función f es uno a uno si diferentes entradas producen _____ salidas. Se puede saber por la gráfica que una función es uno a uno si se usa la Prueba de la _____.
- (a) Para que una función tenga una inversa, debe ser _____. Entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$$
- (b) ¿Cuál es la inversa de la función que usted escogió en la parte (a)?

- Una función f tiene la siguiente descripción verbal: "Multiplique por 3, sume 5, y luego tome la tercera potencia del resultado".
 - Escriba una descripción verbal para f^{-1} .
 - Encuentre fórmulas algebraicas que expresen f y f^{-1} en términos de la entrada x .
- ¿Verdadero o falso?
 - Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es lo mismo que $\frac{1}{f(x)}$.
 - Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(f(x)) = x$.

HABILIDADES

5-10 ■ Nos dan la gráfica de una función f . Determine si f es uno a uno.



11-20 ■ Determine si la función es uno a uno.

11. $f(x) = -2x + 4$

12. $f(x) = 3x - 2$

13. $g(x) = \sqrt{x}$

14. $g(x) = |x|$

15. $h(x) = x^2 - 2x$

16. $h(x) = x^3 + 8$

17. $f(x) = x^4 + 5$

18. $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \leq x \leq 2$

19. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

20. $f(x) = \frac{1}{x}$

21-22 ■ Suponga que f es una función uno a uno.

21. (a) Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.

(b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

22. (a) Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.

(b) Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

23. Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

24. Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \geq -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

25-36 ■ Use la Propiedad de la Función Inversa para demostrar que f y g son inversas entre sí.

25. $f(x) = x - 6; \quad g(x) = x + 6$

26. $f(x) = 3x; \quad g(x) = \frac{x}{3}$

27. $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \frac{x+5}{2}$

28. $f(x) = \frac{3-x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

29. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{x}$

30. $f(x) = x^5; \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

31. $f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0; \quad g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

32. $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = (x-1)^{1/3}$

33. $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1; \quad g(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad x \neq 0$

34. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad g(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

35. $f(x) = \frac{x+2}{x-2}; \quad g(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

36. $f(x) = \frac{x-5}{3x+4}; \quad g(x) = \frac{5+4x}{1-3x}$

37-60 ■ Encuentre la función inversa de f .

37. $f(x) = 2x + 1$

38. $f(x) = 6 - x$

39. $f(x) = 4x + 7$

40. $f(x) = 3 - 5x$

41. $f(x) = 5 - 4x^3$

42. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$

43. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

44. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

45. $f(x) = \frac{x}{x+4}$

46. $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

47. $f(x) = \frac{2x+5}{x-7}$

48. $f(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$

49. $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$

50. $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

51. $f(x) = \sqrt{2+5x}$

52. $f(x) = x^2 + x, \quad x \geq -\frac{1}{2}$

53. $f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0$

54. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

55. $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$

56. $f(x) = (2-x^3)^5$

57. $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$

58. $f(x) = \sqrt{9-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3$

59. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

60. $f(x) = 1 - x^3$

61-64 ■ Nos dan una función f . (a) Trace la gráfica de f . (b) Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1} . (c) Encuentre f^{-1} .

61. $f(x) = 3x - 6$

62. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0$

63. $f(x) = \sqrt{x+1}$

64. $f(x) = x^3 - 1$

 **65-70** ■ Trace la gráfica de f y úsela para determinar si la función es uno a uno.

65. $f(x) = x^3 - x$

66. $f(x) = x^3 + x$

67. $f(x) = \frac{x+12}{x-6}$

68. $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

69. $f(x) = |x| - |x-6|$

70. $f(x) = x \cdot |x|$



- 71-74** ■ Nos dan una función uno a uno. **(a)** Encuentre la inversa de la función. **(b)** Grafique ambas funciones y su inversa en la misma pantalla para verificar que las gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

71. $f(x) = 2 + x$

72. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

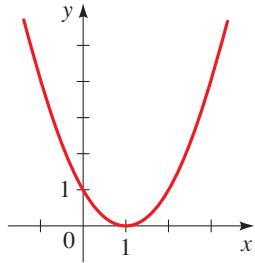
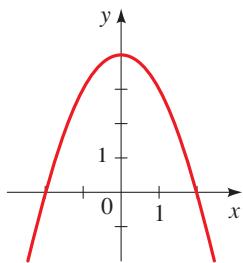
73. $g(x) = \sqrt{x+3}$

74. $g(x) = x^2 + 1, x \geq 0$

- 75-78** ■ La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio para que la función resultante sea uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

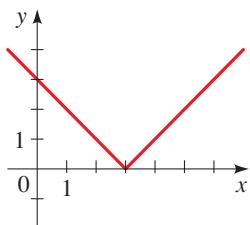
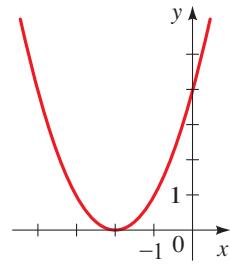
75. $f(x) = 4 - x^2$

76. $g(x) = (x - 1)^2$

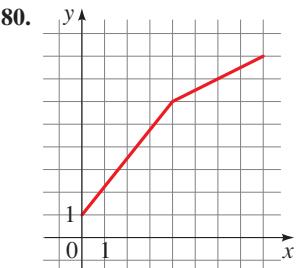
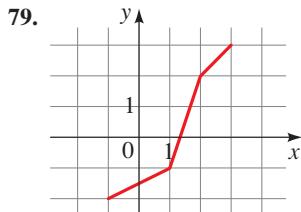


77. $h(x) = (x + 2)^2$

78. $k(x) = |x - 3|$



- 79-80** ■ Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1} .



APLICACIONES

- 81. Tarifa por un servicio** Por sus servicios, un investigador privado requiere una tarifa de retención de \$500 más \$80 por hora. Represente con x el número de horas que el investigador emplea trabajando en un caso.
- (a)** Encuentre una función que modele la tarifa del investigador como función de x .
- (b)** Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
- (c)** Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 82. Ley de Torricelli** Un tanque contiene 100 galones de agua que se drena por una fuga del fondo y hace que el tanque se vacíe en 40 minutos. La Ley de Torricelli da el volumen del agua restante en el tanque después de t minutos como

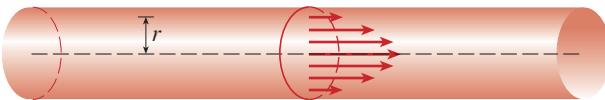
$$V(t) = 100 \left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

- (a)** Encuentre V^{-1} . ¿Qué representa V^{-1} ?
- (b)** Encuentre $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 83. Circulación sanguínea** Cuando la sangre se mueve en una vena o arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que aumenta la distancia r desde el eje central (vea la figura siguiente). Para una arteria con radio 0.5 cm, v (en cm/s) está dada como función de r (en cm)

$$v(r) = 18,500(0.25 - r^2)$$

- (a)** Encuentre v^{-1} . ¿Qué representa v^{-1} ?
- (b)** Encuentre $v^{-1}(30)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?



- 84. Función de demanda** La cantidad de una mercancía que se vende recibe el nombre de *demand* de esa mercancía. La demanda D de cierta mercancía es función del precio dado por

$$D(p) = -3p + 150$$

- (a)** Encuentre D^{-1} . ¿Qué representa D^{-1} ?
- (b)** Encuentre $D^{-1}(30)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 85. Escalas de temperatura** La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

- (a)** Encuentre F^{-1} . ¿Qué representa F^{-1} ?
- (b)** Encuentre $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

- 86. Tasas de cambio** El valor relativo de las monedas en circulación fluctúa a diario. Cuando este problema se escribió, un dólar canadiense valía 1.0573 dólares de Estados Unidos.

- (a)** Encuentre una función f que dé el valor del dólar de Estados Unidos $f(x)$ de x dólares canadienses.
- (b)** Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
- (c)** ¿Cuánto dinero canadiense valdrían \$12,250 en dólares de Estados Unidos?

- 87. Impuesto sobre la renta** En cierto país, el impuesto sobre ingresos iguales o menores a €20,000 es 10%. Para ingresos mayores a €20,000, el impuesto es €2000 más 20% de la cantidad que pase de €20,000.

- (a)** Encuentre una función f que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso x . Exprese f como función definida por tramos.
- (b)** Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
- (c)** ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de €10,000?

- 88. Descuentos múltiples** Un distribuidor de autos anuncia un 15% de descuento en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece un descuento de \$1000 en la compra de un auto nuevo. Con x represente el precio de etiqueta del auto.

- (a)** Suponga que aplica sólo el 15% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta x .

- (b) Suponga que aplica sólo el descuento de \$1000. Encuentre una función g que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta x .
- (c) Encuentre una fórmula para $H = f \circ g$.
- (d) Encuentre H^{-1} . ¿Qué representa H^{-1} ?
- (e) Encuentre $H^{-1}(13,000)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?
- 89. Costo de una pizza** Marcello's Pizza cobra un precio base de \$7 por una pizza grande más \$2 por cada aderezo o guarnición. Así, si una persona ordena una pizza grande con x aderezos, el precio de su pizza está dado por la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa la función f^{-1} ?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

90. Determinar cuándo una función lineal tiene inversa

Para que la función lineal $f(x) = mx + b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

91. Hallar una inversa “mentalmente”

En las notas al margen de esta sección señalamos que se puede hallar la inversa de una función con sólo invertir las operaciones que forman la función. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 vimos que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{es} \quad f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$$

porque la “inversa” de “Multiplique por 3 y reste 2” es “Sume 2 y divida entre 3”. Use el mismo procedimiento para hallar la inversa de las siguientes funciones.

- (a) $f(x) = \frac{2x + 1}{5}$ (b) $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$
 (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2}$ (d) $f(x) = (2x - 5)^3$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Es posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para hallar la inversa de esta función? Si es así, hágalo. Si no, explique qué es diferente acerca de esta función que hace difícil este trabajo.

92. La función identidad

La función $f(x) = x$ se denomina **función identidad**. Demuestre que para cualquier función f tenemos $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. (Esto significa que la función identidad I se comporta para funciones y composición igual que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

93. Despejar una función incógnita de una ecuación

En el Ejercicio 69 de la Sección 2.6 se pidió al estudiante resolviera ecuaciones en las que las incógnitas eran funciones. Ahora que ya sabemos de inversas y la función identidad (vea Ejercicio 92), podemos usar álgebra para resolver esas ecuaciones. Por ejemplo, para despejar la función incógnita f de $f \circ g = h$, efectuamos los siguientes pasos:

$f \circ g = h$ $f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$ $f \circ I = h \circ g^{-1}$ $f = h \circ g^{-1}$	Problema: despejar f Componer con g^{-1} en la derecha Porque $g \circ g^{-1} = I$ Porque $f \circ I = f$
--	--

Entonces la solución es $f = h \circ g^{-1}$. Use esta técnica para despejar la función desconocida indicada de la ecuación $f \circ g = h$.

- (a) Despeje f , donde $g(x) = 2x + 1$ y
 $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$.
 (b) Despeje y , donde $f(x) = 3x + 5$ y
 $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$.

CAPÍTULO 2 | REPASO

■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

- Defina verbalmente cada concepto. (Verifique consultando la definición del texto.)
 - Función
 - Dominio y rango de una función
 - Gráfica de una función
 - Variables independientes y dependientes
- Trace manualmente, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.
 - $f(x) = x$
 - $g(x) = x^2$
 - $h(x) = x^3$
 - $j(x) = x^4$
- (a) Exprese la Prueba de la Recta Vertical.
 (b) Exprese la Prueba de la Recta Horizontal.
- ¿Cómo se define la rapidez de cambio promedio de la función f entre dos puntos?
- ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de cambio promedio de una función lineal?
- Defina verbalmente cada concepto.
 - Función creciente
 - Función decreciente
 - Función constante
- Suponga que nos dan la gráfica de f . Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtenga de la gráfica de f como sigue.
 - Desplazar 3 unidades hacia arriba.
 - Desplazar 3 unidades hacia abajo.
 - Desplazar 3 unidades a la derecha.
 - Desplazar 3 unidades a la izquierda.
 - Reflejar en el eje x .
 - Reflejar en el eje y .
 - Contraer verticalmente en un factor de 3.
 - Contraer verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$.
 - Alargar verticalmente en un factor de 2.
 - Alargar verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$.