3.5 NÚMEROS COMPLEJOS

Operaciones aritméticas con números complejos ▶ Raíces cuadradas de números negativos ▶ Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

En la Sección 1.5 vimos que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

no tiene solución real. Si intentamos resolver esta ecuación, obtenemos $x^2 = -4$, por lo que

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible, porque el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo, $(-2)^2 = 4$, un número positivo.] Por lo tanto, los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Vea en la nota acerca de Cardano (página 274) un ejemplo de cómo se usan números complejos para hallar soluciones reales de ecuaciones con polinomios.

Para hacer posible resolver *todas* las ecuaciones cuadráticas, los matemáticos han inventado un sistema numérico expandido, llamado *sistema de números complejos*. Primero definieron el nuevo número

$$i = \sqrt{-1}$$

Esto significa que $i^2 = -1$. Un número complejo es entonces un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

DEFINICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales y $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es a y la **parte imaginaria** es b. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Observe que las partes reales e imaginarias de un número complejo son números reales.

EJEMPLO 1 | Números complejos

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **9** ■

Un número tal como $6i$, que tiene parte real 0, se llama **número imaginario puro**. Un número real como -7 puede considerarse como número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos, toda ecuación cuadrática tiene soluciones. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2i^2 = 4(-1) = -4 \qquad \text{y} \qquad (-2i)^2 = (-2)^2i^2 = 4(-1) = -4$$

Aun cuando usamos el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no deben considerarse como menos “reales” (en el sentido más bien ordinario que matemático de la palabra) que números negativos o números irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana —los números -1 y $\sqrt{2}$ así como el número i. Estudiamos números complejos porque completan, en una forma útil y elegante, nuestro estudio de las soluciones de ecuaciones. De hecho, los números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y matemáticas, sino también en las otras ciencias. Para dar sólo un ejemplo, en teoría eléctrica la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

▼ Operaciones aritméticas con números complejos

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen exactamente igual que con cualquier número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que necesitamos recordar es que $i^2 = -1$. Entonces, los siguientes cálculos son válidos.

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 && \text{Multiplique y reúna términos semejantes}\\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) && i^2 = -1\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Combine partes reales e imaginarias}\end{aligned}$$

Por lo tanto definimos la suma, diferencia y producto de números complejos como sigue.

SUMAR, RESTAR Y MULTIPLICAR NÚMEROS COMPLEJOS

Definición	Descripción
Suma	
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Para sumar números complejos, sumamos las partes reales y las partes imaginarias.
Resta	
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Para restar números complejos, restamos las partes reales y las partes imaginarias.
Multiplicación	
$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	Multiplicamos números complejos como binomios, usando $i^2 = -1$.

EJEMPLO 2 | Sumar, restar y multiplicar números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

(a) $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ **(b)** $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

(c) $(3 + 5i)(4 - 2i)$ **(d)** i^{23}

Las calculadoras graficadoras pueden realizar operaciones aritméticas con números complejos.

```
(3+5i)+(4-2i)
              7+3i
(3+5i)*(4-2i)
            22+14i
```

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con la definición, sumamos las partes reales y sumamos las partes imaginarias.

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

(b) $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

(c) $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

(d) $i^{23} = i^{22+1} = (i^2)^{11}i = (-1)^{11}i = (-1)i = -i$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15, 19, 25** Y **33** ■

Conjugados complejos

Número	Conjugado
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$1 - i$	$1 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

La división de números complejos es muy semejante a racionalizar el denominador de una expresión radical, que consideramos en la Sección 1.4. Para el número complejo $z = a + bi$ definimos que su **conjugado complejo** es $\overline{z} = a - bi$. Observe que

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

De modo que el producto de un número complejo y su conjugado es siempre un número real no negativo. Usamos esta propiedad para dividir números complejos.

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para simplificar el cociente $\dfrac{a+bi}{c+di}$, multiplicamos el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Más que memorizar toda esta fórmula, es más fácil recordar el primer paso y luego multiplicar el numerador y el denominador como de costumbre.

EJEMPLO 3 | Dividir números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

(a) $\dfrac{3+5i}{1-2i}$ **(b)** $\dfrac{7+3i}{4i}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador para hacer que el nuevo denominador sea un número real.

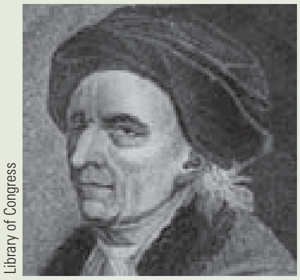
(a) El complejo conjugado de $1 - 2i$ es $\overline{1-2i} = 1 + 2i$.

$$\frac{3+5i}{1-2i} = \left(\frac{3+5i}{1-2i}\right)\left(\frac{1+2i}{1+2i}\right) = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

(b) El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por lo tanto,

$$\frac{7+3i}{4i} = \left(\frac{7+3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12-28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$

INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **43** ■



LEONHARD EULER (1707-1783) nació en Basilea, Suiza, hijo de un pastor. Cuando Euler tenía 13 años, su padre lo envió a la Universidad en Basilea a estudiar teología, pero Euler pronto decidió dedicarse a las ciencias. Además de teología, estudió matemáticas, medicina, astronomía, física e idiomas de Asia. Se dice que Euler podía calcular sin esfuerzo al igual que "los hombres respiran o las águilas vuelan". Cien años antes de Euler, Fermat (vea página 99) había conjeturado que $2^{2^n} + 1$ es un número primo para toda n. Los primeros cinco de estos números son 5, 17, 257, 65,537, y 4,294,967,297. Es fácil demostrar que los primeros cuatro son primos. El quinto también fue considerado primo hasta que Euler, con su fenomenal capacidad de cálculo, demostró que es el producto $641 \times 6{,}700{,}417$ por lo tanto no es primo. Euler publicó más que cualquier otro matemático en la historia. Sus obras recolectadas comprenden 75 grandes volúmenes. Aun cuando quedó ciego los últimos 17 años de su vida, continuó trabajando y publicando sus obras. En éstas popularizó el uso de los símbolos π, e e i, que el lector encontrará en este libro. Una de las más duraderas aportaciones de Euler es su desarrollo de los números complejos.

▼ Raíces cuadradas de números negativos

Así como todo número real positivo r tiene dos raíces cuadradas ($\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$), todo número negativo también tiene dos raíces cuadradas. Si $-r$ es un número negativo, entonces sus raíces cuadradas son $\pm i\sqrt{r}$, porque $(i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r$ y $(-i\sqrt{r})^2 = (-1)^2 i^2 r = -r$.

RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Si $-r$ es negativo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$$

Las dos raíces cuadradas de $-r$ son $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$.

Por lo general escribimos $i\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt{b}\,i$ para evitar confusión con $\sqrt{bi}$

EJEMPLO 4 | Raíces cuadradas de números negativos

(a) $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$ **(b)** $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$ **(c)** $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **49** ■

Debe tenerse especial cuidado al realizar cálculos que comprendan raíces cuadradas de números negativos. Aun cuando $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando a y b son positivas, *esto no es verdadero* cuando ambas son negativas. Por ejemplo,

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} = i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

pero
$$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6}$$

entonces
$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-2)(-3)}$$

Al completar radicales de números negativos, expréselas primero en la forma $i\sqrt{r}$ (donde $r > 0$) para evitar posibles errores de este tipo.

EJEMPLO 5 | Usar raíces cuadradas de números negativos

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ y expréselos en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4})\\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i)\\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2\cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})\\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Ya hemos visto que si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. Pero en el sistema de números complejos, esta ecuación siempre tendrá soluciones porque los números negativos tienen raíces cuadradas en la situación expandida.

EJEMPLO 6 | Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes.

(a) $x^2 + 9 = 0$ **(b)** $x^2 + 4x + 5 = 0$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, y entonces

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Las soluciones son por tanto $3i$ y $-3i$.

(b) Por la Fórmula Cuadrática tenemos

$$\begin{aligned}x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 5}}{2}\\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}\\ &= \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i\end{aligned}$$

Entonces las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **57** Y **59**

Vemos del Ejemplo 6 que si una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene soluciones complejos, entonces estas soluciones son complejos conjugados entre sí. Por lo tanto, si $a + bi$ es una solución, entonces $a - bi$ también es una solución.

EJEMPLO 7 | Complejos conjugados como soluciones de una cuadrática

Demuestre que las soluciones de la ecuaciones

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

son conjugados complejos entre sí.

SOLUCIÓN Usamos la Fórmula Cuadrática para obtener

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

Por lo tanto, las soluciones son $3 + \frac{1}{2}i$ y $3 - \frac{1}{2}i$, y éstos son complejos conjugados.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

3.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El número imaginario i tiene la propiedad de que $i^2 =$ ________.
2. Para el número complejo $3 + 4i$ la parte real es ________ y la parte imaginaria es ________.
3. **(a)** El complejo conjugado de $3 + 4i$ es $\overline{3 + 4i} =$ ________.
   (b) $(3 + 4i)(\overline{3 + 4i}) =$ ________.
4. Si $3 + 4i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales, entonces ________ también es una solución de la ecuación.

HABILIDADES

5-14 ■ Encuentre las partes real e imaginaria del número complejo.

5. $5 - 7i$
6. $-6 + 4i$
7. $\dfrac{-2 - 5i}{3}$
8. $\dfrac{4 + 7i}{2}$
9. 3
10. $-\frac{1}{2}$
11. $-\frac{2}{3}i$
12. $i\sqrt{3}$
13. $\sqrt{3} + \sqrt{-4}$
14. $2 - \sqrt{-5}$

15-46 ■ Evalúe la expresión y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

15. $(2 - 5i) + (3 + 4i)$
16. $(2 + 5i) + (4 - 6i)$
17. $(-6 + 6i) + (9 - i)$
18. $(3 - 2i) + \left(-5 - \frac{1}{3}i\right)$
19. $\left(7 - \frac{1}{2}i\right) - \left(5 + \frac{3}{2}i\right)$
20. $(-4 + i) - (2 - 5i)$
21. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$
22. $6i - (4 - i)$
23. $4(-1 + 2i)$
24. $2i\left(\frac{1}{2} - i\right)$
25. $(7 - i)(4 + 2i)$
26. $(5 - 3i)(1 + i)$
27. $(3 - 4i)(5 - 12i)$
28. $\left(\frac{2}{3} + 12i\right)\left(\frac{1}{6} + 24i\right)$
29. $(6 + 5i)(2 - 3i)$
30. $(-2 + i)(3 - 7i)$
31. i^3
32. $(2i)^4$
33. i^{100}
34. i^{1002}
35. $\dfrac{1}{i}$
36. $\dfrac{1}{1 + i}$
37. $\dfrac{2 - 3i}{1 - 2i}$
38. $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$
39. $\dfrac{26 + 39i}{2 - 3i}$
40. $\dfrac{25}{4 - 3i}$
41. $\dfrac{10i}{1 - 2i}$
42. $(2 - 3i)^{-1}$
43. $\dfrac{4 + 6i}{3i}$
44. $\dfrac{-3 + 5i}{15i}$
45. $\dfrac{1}{1 + i} - \dfrac{1}{1 - i}$
46. $\dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$

47-56 ■ Evalúe la expresión radical y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

47. $\sqrt{-25}$
48. $\sqrt{\dfrac{-9}{4}}$
49. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
50. $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$

51. $(3-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-1})$

52. $(\sqrt{3}-\sqrt{-4})(\sqrt{6}-\sqrt{-8})$

53. $\dfrac{2+\sqrt{-8}}{1+\sqrt{-2}}$

54. $\dfrac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$

55. $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

56. $\dfrac{\sqrt{-7}\sqrt{-49}}{\sqrt{28}}$

57-72 ■ Encuentre todas las soluciones de la ecuación y expréselas en la forma $a+bi$.

57. $x^2+49=0$

58. $9x^2+4=0$

59. $x^2-4x+5=0$

60. $x^2+2x+2=0$

61. $x^2+2x+5=0$

62. $x^2-6x+10=0$

63. $x^2+x+1=0$

64. $x^2-3x+3=0$

65. $2x^2-2x+1=0$

66. $2x^2+3=2x$

67. $t+3+\dfrac{3}{t}=0$

68. $z+4+\dfrac{12}{z}=0$

69. $6x^2+12x+7=0$

70. $4x^2-16x+19=0$

71. $\frac{1}{2}x^2-x+5=0$

72. $x^2+\frac{1}{2}x+1=0$

73-80 ■ Recuerde que el símbolo $\overline{z}$ representa el conjugado complejo de z. Si $z=a+bi$ y $w=c+di$, demuestre cada enunciado.

73. $\overline{z}+\overline{w}=\overline{z+w}$

74. $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

75. $(\overline{z})^2=\overline{z^2}$

76. $\overline{\overline{z}}=z$

77. $z+\overline{z}$ es un número real.

78. $z-\overline{z}$ es un número imaginario puro.

79. $z\cdot\overline{z}$ es un número real.

80. $z=\overline{z}$ si y sólo si z es real.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

81. Raíces complejas conjugadas Suponga que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene coeficientes reales y raíces complejas. ¿Por qué deben las raíces ser complejos conjugados entre sí? (Piense en cómo encontraría las raíces usando la Fórmula Cuadrática.)

82. Potencias de i Calcule las primeras 12 potencias de i, es decir, $i, i^2, i^3, \ldots, i^{12}$. ¿Se observa un patrón? Explique cómo calcularía usted cualquier potencia entera de i, usando el patrón que haya descubierto. Use este procedimiento para calcular i^{4446}.