4.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales ▶ Ecuaciones logarítmicas ▶ Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para "bajar x" del exponente.

$$\begin{aligned} 2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Tome ln de cada lado} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje } x \\ &\approx 2.807 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Recuerde que la Ley 3 de las Leyes de Logaritmos dice que $\log_a A^c = C \log_a A$.

El método que usamos para resolver $2^x = 7$ es típico de cómo resolvemos ecuaciones exponenciales en general.

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

SOLUCIÓN Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

$$
\begin{aligned}
3^{x+2} &= 7 && \text{Ecuación dada} \\
\log(3^{x+2}) &= \log 7 && \text{Tome log de cada lado} \\
(x+2)\log 3 &= \log 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\
x + 2 &= \frac{\log 7}{\log 3} && \text{Divida entre log 3} \\
x &= \frac{\log 7}{\log 3} - 2 && \text{Reste 2} \\
&\approx -0.228756 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 2 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

SOLUCION Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\
e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\
\ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tome ln de cada lado} \\
2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\
x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Divida entre 2} \\
&\approx 0.458 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

EJEMPLO 3 | Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de manera algebraica y gráfica.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Como la base del término exponencial es e, usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$
\begin{aligned}
e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada} \\
\ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\
3 - 2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln} \\
-2x &= -3 + \ln 4 && \text{Reste 3} \\
x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 && \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

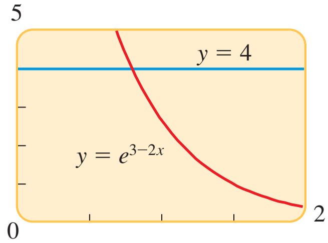


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Graficamos las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de vista como en la Figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que $x \approx 0.81$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

EJEMPLO 4 | Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Para aislar el término exponencial, factorizamos.

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^x - 6 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ (e^x)^2 - e^x - 6 &= 0 && \text{Ley de Exponentes} \\ (e^x - 3)(e^x + 2) &= 0 && \text{Factorice (un cuadrático en } e^x\text{)} \\ e^x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x + 2 &= 0 && \text{Propiedad del Producto Cero} \\ e^x = 3 \qquad\qquad e^x &= -2 \end{aligned}$$

Si hacemos $w = e^x$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

La ecuación $e^x = 3$ lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Entonces, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned} 3xe^x + x^2e^x &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ x(3 + x)e^x &= 0 && \text{Factorizamos factores comunes} \\ x(3 + x) &= 0 && \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)} \\ x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x &= 0 && \text{Propiedad del Producto Cero} \end{aligned}$$

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✔

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

La **determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre ^{14}C y ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de ^{14}C en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de ^{14}C que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace t años contiene 73% del ^{14}C que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x, escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación, despeje x.

(a) $\ln x = 8$ **(b)** $\log_2(25 - x) = 3$

SOLUCIÓN

(a)

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema en otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

(b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)}$$

$$25 - x = 8$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 17$, tenemos

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **41**

EJEMPLO 7 | Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

SOLUCIÓN Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$\begin{aligned} 4 + 3\log(2x) &= 16 && \text{Ecuación dada} \\ 3\log(2x) &= 12 && \text{Reste 4} \\ \log(2x) &= 4 && \text{Divida entre 3} \\ 2x &= 10^4 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x &= 5000 && \text{Divida entre 2} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 5000$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4 + 3\log 2(5000) &= 4 + 3\log 10{,}000 \\ &= 4 + 3(4) \\ &= 16 \quad ✔ \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

EJEMPLO 8 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$$\begin{aligned} \log[(x + 2)(x - 1)] &= 1 && \text{Ley 1} \\ (x + 2)(x - 1) &= 10 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x^2 + x - 2 &= 10 && \text{Expanda lado izquierdo} \\ x^2 + x - 12 &= 0 && \text{Reste 10} \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 && \text{Factorice} \\ x = -4 \quad \text{o} \quad x &= 3 \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -4$:

$$\begin{aligned} &\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1) \\ &\quad = \log(-2) + \log(-5) \\ &\quad\quad \text{no definido} \quad ✘ \end{aligned}$$

$x = 3$:

$$\begin{aligned} &\log(3 + 2) + \log(3 - 1) \\ &\quad = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) \\ &\quad = \log 10 = 1 \quad ✔ \end{aligned}$$

Verificamos estas potenciales soluciones en la ecuación original y encontramos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero $x = 3$ es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas.*)

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

A continuación graficamos

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la Figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Entonces, la única solución es $x \approx 3$.

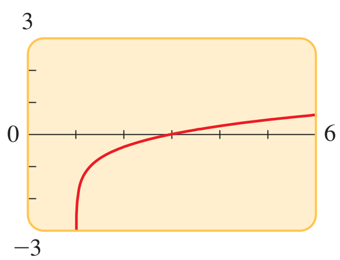


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

En el Ejemplo 9 no es posible aislar x algebraicamente, de modo que debemos resolver gráficamente la ecuación.

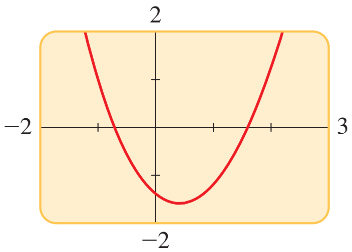


FIGURA 3

EJEMPLO 9 | Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2\ln(x + 2)$.

SOLUCIÓN Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2\ln(x + 2) = 0$$

Entonces graficamos

$$y = x^2 - 2\ln(x + 2)$$

como en la Figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Si hacemos zoom en los puntos de intersección x, vemos que hay dos soluciones

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia sea el agua, más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material está descrita en el siguiente ejemplo.

La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

EJEMPLO 10 | Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **Ley de Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

(a) Despeje I de la ecuación

(b) Para cierto lago, $k = 0.025$, y la intensidad de la luz es $I_0 = 14$ lumen (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

SOLUCIÓN

(a) Primero aislamos el término logarítmico.

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \qquad \text{Multiplique por } -k$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx} \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$I = I_0 e^{-kx} \qquad \text{Multiplique por } I_0$$

(b) Encontramos I usando la fórmula de la parte (a).

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-kx} && \text{De la parte (a)} \\ &= 14e^{(-0.025)(20)} && I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20 \\ &\approx 8.49 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que hallamos en la Sección 4.1. Si un principal P se invierte a una tasa de interés r durante un tiempo de t años, entonces la cantidad A de la inversión está dada por

$$A = P(1 + r) \qquad \text{Interés simple (para un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \qquad \text{Interés capitalizado continuamente}$$

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

EJEMPLO 11 | Hallar el tiempo para que una inversión se duplique

Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

(a) Semestralmente **(b)** Continuamente

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula para interés compuesto con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$, $r = 0.05$ y $n = 2$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} &= 10{,}000 && P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A\\
(1.025)^{2t} &= 2 && \text{Divida entre 5000}\\
\log 1.025^{2t} &= \log 2 && \text{Tome log de cada lado}\\
2t \log 1.025 &= \log 2 && \text{Ley 3 (baje el exponente)}\\
t &= \frac{\log 2}{2 \log 1.025} && \text{Divida entre 2 log 1.025}\\
t &\approx 14.04 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

(b) Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$ y $r = 0.05$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
5000e^{0.05t} &= 10{,}000 && Pe^{rt} = A\\
e^{0.05t} &= 2 && \text{Divida entre 5000}\\
\ln e^{0.05t} &= \ln 2 && \text{Tome ln de cada lado}\\
0.05t &= \ln 2 && \text{Propiedad de ln}\\
t &= \frac{\ln 2}{0.05} && \text{Divida entre 0.05}\\
t &\approx 13.86 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

EJEMPLO 12 | Tiempo necesario para crecer una inversión

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $A(t) = \$4000$ y $r = 0.04$ y de la ecuación exponencial resultante se despeja t.

$$
\begin{aligned}
1000e^{0.04t} &= 4000 && Pe^{rt} = A \\
e^{0.04t} &= 4 && \text{Divida entre 1000} \\
0.04t &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\
t &= \frac{\ln 4}{0.04} && \text{Divida entre 0.04} \\
t &\approx 34.66 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

La cantidad será $4000 en 34 años y 8 meses.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

4.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.

(a) Primero, aislamos e^x para obtener la ecuación equivalente___.

(b) A continuación, tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente _____.

(c) Ahora usamos una calculadora para hallar $x =$ _____.

2. Resolvamos la ecuación logarítmica

$\log 3 + \log(x - 2) = \log x$.

(a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente_______.

(b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente______.

(c) Ahora encontramos $x =$ _______.

HABILIDADES

3-28 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3. $10^x = 25$ **4.** $10^{-x} = 4$

5. $e^{-2x} = 7$ **6.** $e^{3x} = 12$

7. $2^{1-x} = 3$ **8.** $3^{2x-1} = 5$

9. $3e^x = 10$ **10.** $2e^{12x} = 17$

11. $e^{1-4x} = 2$ **12.** $4(1 + 10^{5x}) = 9$

13. $4 + 3^{5x} = 8$ **14.** $2^{3x} = 34$

15. $8^{0.4x} = 5$ **16.** $3^{x/14} = 0.1$

17. $5^{-x/100} = 2$ **18.** $e^{3-5x} = 16$

19. $e^{2x+1} = 200$ **20.** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

21. $5^x = 4^{x+1}$ **22.** $10^{1-x} = 6^x$

23. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$ **24.** $7^{x/2} = 5^{1-x}$

25. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$ **26.** $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

27. $100(1.04)^{2t} = 300$ **28.** $(1.00625)^{12t} = 2$

29-36 ■ Resuelva la ecuación.

29. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **30.** $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

31. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$ **32.** $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

33. $x^2 2^x - 2^x = 0$ **34.** $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

35. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$ **36.** $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

37-54 ■ De la ecuación logarítmica despeje x.

37. $\ln x = 10$ **38.** $\ln(2 + x) = 1$

39. $\log x = -2$ **40.** $\log(x - 4) = 3$

41. $\log(3x + 5) = 2$ **42.** $\log_3(2 - x) = 3$

43. $4 - \log(3 - x) = 3$ **44.** $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

45. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

46. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

47. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

48. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

49. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

50. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$

51. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

52. $\log x + \log(x - 3) = 1$

53. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

54. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

55. ¿Para qué valor de x es verdadero lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

56. ¿Para qué valor de x es verdadero que $(\log x)^3 = 3 \log x$?

57. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

58. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

59-66 ■ Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

59. $\ln x = 3 - x$

60. $\log x = x^2 - 2$

61. $x^3 - x = \log(x + 1)$

62. $x = \ln(4 - x^2)$

63. $e^x = -x$

64. $2^{-x} = x - 1$

65. $4^{-x} = \sqrt{x}$

66. $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

67-70 ■ Resuelva la desigualdad.

67. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

68. $3 \le \log_2 x \le 4$

69. $2 < 10^x < 5$

70. $x^2 e^x - 2e^x < 0$

71-74 ■ Encuentre la función inversa de f.

71. $f(x) = 2^{2x}$

72. $f(x) = 3^{x+1}$

73. $f(x) = \log_2(x - 1)$

74. $f(x) = \log 3x$

APLICACIONES

75. Interés compuesto Un hombre invierte \$5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
(a) Encuentre la cantidad después de 3 años.
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

76. Interés compuesto Una mujer invierte \$6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
(a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea \$8000?

77. Interés compuesto Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de \$5000 crezca a \$8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

78. Interés compuesto Nancy desea invertir \$4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escoger para ahorrar una cantidad de \$5000?

79. Duplicar una inversión ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

80. Tasa de interés Una suma de \$1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

81. Desintegración radiactiva Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

82. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?

83. Población de peces En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.
(a) Encuentre la población de peces después de 3 años.
(b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?

84. Transparencia de un lago Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.
(a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?

85. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascals, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

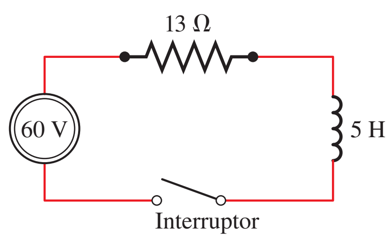
donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.
(a) De la ecuación, despeje P.
(b) Use la parte (a) para hallar la presión P a una altitud de 4 km.

86. Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

(a) De la ecuación, despeje T.
(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos $(t = 20)$.

87. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.
(a) Use la ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.
(b) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



88. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo t de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

(a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.

(b) Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de t meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

(c) Trace una gráfica de la curva de aprendizaje de la parte (b).

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

89. Estimar una solución Sin resolver realmente la ecuación, encuentre dos números enteros entre los cuales debe estar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo ha llegado a esa conclusión.

90. Una ecuación sorprendente Tome logaritmos para demostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación

$$x^{1/\log x} = k?$$

¿Qué nos dice esto acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta usando una calculadora graficadora.

91. Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático si se aplica la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

(a) $(x-1)^{\log(x-1)} = 100(x-1)$ [Tome log de cada lado.]

(b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie todos los log a base 2.]

(c) $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como cuadrática en 2^x.]